1.— On considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi : $\mathbf{P}(X_n = 1) = p > 0$, $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1 - p$ et la suite des sommes partielles $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $S_0 = 0$.

a. Vérifier les égalités $\mathbf{P}(S_{n+1} = k+1 | S_n = k) = p$ et $\mathbf{P}(S_{n+1} = k-1 | S_n = k) = 1 - p$. Pour quelles valeurs de p le processus (S_n) est-il une $\mathbf{P}$-martingale (resp. $\mathbf{P}$-sous-martingale, $\mathbf{P}$-surmartingale) ?

b. Calculer $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{Var}(S_n)$.

c. On suppose à partir de cette question que $p = 1/2$: montrer que $(S_n^2)_n$ est une $\mathbf{P}$-sous-martingale et que $(S_n^2 - n)_n$ est une $\mathbf{P}$-martingale.

d. Montrer que $\mathbf{Cov}(S_n, S_m) = n \wedge m$.

e. Pour $0 \le i \le j \le k \le l$, montrer que les accroissements $S_j - S_i$ et $S_l - S_k$ sont indépendants.

Dans tout ce qui suit, $(W_t)_{t\ge 0}$ désigne un processus de Wiener. En outre p désigne la fonction

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2t}\Big).$$

2.— Montrer que $(-W_t)$ est aussi un brownien. (examiner les accroissements : sont-ils indépendants ? stationnaires ? examiner aussi les trajectoires)

3.— Montrer que $\exp(W_t - t/2)$ définit une martingale (pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée au processus de Wiener).

4.— Montrer que pour $0 \le s < t$ on a

$$\mathbf{E}(W_s \mid W_t) = \frac{s}{t} W_t.$$

5.— On pose $U_t = e^{-at} W_{e^{2at}}$ ($a > 0$ donné). Calculer la fonction d'autocovariance $c(s,t) = \mathbf{E}(U_s U_t)$.

6.— Soit $T > 0$ réel fixé : on considère une suite de subdivisions $(\pi_n)_{n>0}$ de l'intervalle $[0,T]$ avec $\pi_n = \{t_0^n = 0 < t_1^n < \cdots < t_N^n = T\}$ où $N = N(\pi_n) = N_n$ représente le nombre de sous-intervalles. On suppose que le pas $\delta(\pi_n) = \max_{1\le j\le N} |t_j^n - t_{j-1}^n|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On pourra prendre par exemple $t_j^n = j\frac{T}{n}$, subdivision en n intervalles de même longueur.
Déterminer les limites dans L^2 de

$$S_n = \sum_{j=0}^{N_n - 1} W_{t_j^n} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

et de

$$T_n = \sum_{j=0}^{N_n - 1} W_{t_{j+1}^n} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}).$$

(utiliser les identités $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$ et $b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2$)

7.— Soit f un processus L^2 *étagé, i.e.* de la forme

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathbf{1}_{]t_j, t_{j+1}]}(t)$$

(on utilise ici la notation fonctionnelle $f(t)$ plutôt que f_t) où (t_j) est une suite réelle croissante, $t_0 = 0$, et où les a_j sont des variables aléatoires L^2 et $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurables. On pose

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

a. Montrer que $\mathbf{E}(I(f)^2) = \mathbf{E}\big(\int_0^\infty |f(t)|^2\, dt\big)$.

b. Soit g un autre processus étagé L^2, $g(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k \mathbf{1}_{]s_k, s_{k+1}]}(t)$. En utilisant la partition de $[0, +\infty[$ construite avec les t_j et les s_k, montrer que $\mathbf{E}(I(f)I(g)) = \mathbf{E}\big(\int_0^\infty f(t) g(t)\, dt\big)$.

8.— On veut montrer que pour presque tout $\omega \in \Omega$ les trajectoires $t \mapsto W_t(\omega)$ ne sont pas dérivables en $t = 0$. On pose, pour tout entier positif n

$$A_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{il existe } t_n \in [0, \frac{1}{n^4}] \text{ tel que } \frac{|W_{t_n}|}{t_n} \geq n\}.$$

Montrer, en utilisant la propriété d'échelle du brownien, que

$$\mathbf{P}\big(A_n\big) \geq \mathbf{P}\Big(\frac{|W_{1/n^4}|}{1/n^4} \geq n\Big) \geq \mathbf{P}\big(|W_1| \geq \frac{1}{n}\big)$$

et en déduire la limite de $\mathbf{P}(A_n)$.
Vérifier que la suite des A_n est décroissante puis calculer la probabilité $\mathbf{P}(\cap_{n\geq 1} A_n)$. Conclure.

9.— Démontrer le résultat précédent en remplaçant la dérivabilité en 0 par la dérivabilité en t_0 réel positif quelconque. (examiner le processus $V_t = W_{t_0+t} - W_{t_0}$)