

CHANGEMENT DE NUMÉRAIRE

Comme d'habitude, W désigne un brownien et T un horizon temporel fini. On rappelle cet énoncé du théorème de Girsanov :

On désigne par λ un processus vérifiant la condition de Novikov

$$\mathbf{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right\} \right] < \infty$$

et on définit la martingale Y :

$$Y_t = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds - \int_0^t \lambda_s dW_s \right\}.$$

On pose alors

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

et on définit une nouvelle mesure de probabilité \mathbf{P}^* par

$$\mathbf{P}^*(A) = \mathbf{E}(Y_T | A) \times \mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A Y_T) \text{ si } \mathbf{P}(A) > 0$$

et $\mathbf{P}^*(A) = 0$ si $\mathbf{P}(A) = 0$.

Alors W^* est un mouvement brownien sur $[0, T]$ relativement à \mathbf{P}^* .

On utilise les notations habituelles pour un marché Black-Scholes, à ceci près que le taux d'actualisation r n'est plus nécessairement constant : on suppose un taux instantané sous la forme d'un processus r_t pour lequel le prix d'un bon zéro-coupon valant 1€ à la date $t = 0$ est $B_t = \exp\{\int_0^t r_s ds\}$ à une date $t \geq 0$ quelconque inférieure à T . L'actif sous-jacent S ne sera pas, dans un premier temps, supposé fournir des dividendes à son détenteur.

1.— (Probabilité risque-neutre) On choisit le bon B comme numéraire. Dans ce cas, si S est un autre actif du marché, le processus $Z = S/B$ est une martingale pour la probabilité associée à B («risque-neutre»). Déterminer le drift de dS/S sous cette nouvelle probabilité *i.e.* le processus α tel que

$$\frac{dS}{S} = \alpha_t dt + \sigma dW_t^*$$

où W^* désigne un brownien pour la nouvelle probabilité.

2.— (Sous-jacent comme numéraire) On pose $Z = B/S$: reprendre la question précédente avec la probabilité associée au numéraire S .

3.— (Autre actif risqué comme numéraire) Soit Y processus d'Itô

$$dY_t = \mu^Y dt + \sigma^Y dW_t^Y$$

où W^Y désigne un autre brownien (sous la même probabilité). On note ρ le processus de covariance instantanée des deux browniens $W^S = W$ et W^Y . Par définition, pour $t < u$:

$$\mathbf{Cov}(W_u - W_t, W_u^Y - W_t^Y) = \mathbf{E}_t \left(\int_t^u \rho_s ds \right)$$

qui fournit la «règle de calcul» $dW_s \cdot dW_s^Y = \rho_s$.

Montrer que sous la probabilité associée au numéraire Y le drift α de dS/S est $r + \rho \sigma \sigma^Y$.

On utilisera la formule d'Itô bi-dimensionnelle : si $Z_t = g(t, X_t, Y_t)$ alors

$$dZ = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX + \frac{\partial g}{\partial y} dY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (dY)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} dX \cdot dY .$$

4.— Soit S tel que, pour une probabilité \mathbf{Q} donnée, on ait

$$d(\log S) = b dt + \sigma dW_t$$

avec W brownien sous \mathbf{Q} .

On désigne par N la distribution de la loi normale centrée réduite. Montrer que pour tout $K > 0$ on a

$$\mathbf{Q}(S_T > K) = N(d) \text{ avec } d = \frac{\log(S_0/K) + bT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

5.— On suppose maintenant que l'actif S engendre des dividendes calculés continûment et réinvestis dans ce même actif. Autrement dit, si q désigne le rendement des dividendes, alors $V = e^q S$ est un actif sans dividende.

Vérifier que $dV/V = q dt + dS/S$. Comment doit-on modifier les formules des exercices précédents concernant α_t et d ?