Modèle de Merton

Merton propose en 1973 de modéliser les taux courts r par la formule

$$r_t = r_0 + at + \sigma W_t, \quad 0 \le t \le T^*$$

où W désigne un brownien sous la probabilité de martingale $\mathbf{P}$ et où r_0, a et σ sont des constantes positives. Soit $B(t,T)$ le prix d'un bon zéro-coupon de maturité $T \le T^*$. Pour $t = 0$ le prix $B(0,T)$ du bon est calculé par la formule

$$B(0,T) = \mathbf{E}\Big(e^{-\int_0^T r_s\,ds}\Big) \tag{1}$$

où l'espérance est prise sous la probabilité de martingale.

Partie 1 : deux lemmes

a. Si X est une variable aléatoire normale d'espérance μ et de variance σ^2, vérifier que la variable $Y = e^X$ a pour espérance et variance respectivement :

$$\mathbf{E}(Y) = e^{\mu+\sigma^2/2} \text{ et } \mathbf{Var}(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}\big(e^{\sigma^2} - 1\big).$$

b. Soit f une fonction à variation bornée sur $[0,T]$, montrer que l'intégrale $\int_0^T f(t)\,dW_t$ est une gaussienne centrée de variance $\int_0^T f^2(t)\,dt$.

Partie 2 : le cas $t = 0$

c. On reprend les notations du début. On veut évaluer $B(0,T)$ à l'aide de la formule (1), ce qui nécessite de connaître la loi de l'intégrale $X_T = \int_0^T r_s\,ds$.
On pose $Z_t = r_t(T-t)$. Montrer que

$$Z_T - Z_0 = -r_0T = -\int_0^T r_t\,dt + \int_0^T (T-t)\,dr_t$$

et en déduire que

$$X_T = r_0T + \frac{1}{2}aT^2 + \int_0^T \sigma(T-t)\,dW_t$$

d. Déduire des questions **b.** et **c.** que la variable X_T est une gaussienne d'espérance $r_0T + \frac{1}{2}aT^2$ et de variance $\frac{1}{3}\sigma^2T^3$.

e. Montrer l'égalité

$$B(0,T) = e^{-r_0T - \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\sigma^2T^3}. \tag{2}$$

Partie 3 : le cas t quelconque

On a

$$B(t,T) = \mathbf{E}\Big(e^{-\int_t^T r_s\,ds} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big). \tag{3}$$

f. En utilisant la propriété de Markov du processus r_t et la formule (3) ci-dessus, montrer que

$$B(t,T) = e^{m(t,T) - n(t,T)r_t} \tag{4}$$

avec

$$m(t,T) = -\frac{1}{2}a(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 \quad \text{et} \quad n(t,T) = T - t.$$

g. Montrer que la dynamique du prix du bon est

$$dB(t,T) = B(t,T)\big(r_t\,dt - \sigma(T-t)\,dW_t\big). \tag{5}$$
