

Épreuve du mercredi 31 janvier 2007

1.— a. Montrer que

$$\int_0^t W_s^5 dW_s = \frac{1}{6} W_t^6 - \frac{5}{2} \int_0^t W_s^4 ds.$$

b. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(W_t^6)$ en fonction de t . On rappelle que $\mathbf{E}(W_s^4) = 3s^2$.

2.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0,2S_t dt + 0,4S_t dW_t$$

avec $S_0 = 100$ € et où les coefficients 0,2 et 0,4 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S .

Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 160 € au bout d'un an.

3.— On divise l'intervalle $[0, T]$ en n parties égales, on pose $t_i^n = iT/n$ et

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}^2 \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$$

où $W = (W_t)$ désigne un processus de Wiener.

Montrer que la suite $f_1, f_2, \dots \in M_{\text{ét}}^2$ approche $f = W^2 \mathbf{1}_{[0, T[}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = 0.$$

Indication : On montrera d'abord l'égalité $\mathbf{E} \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}(|W_t^2 - W_{t_i^n}^2|^2) dt$ puis on utilisera l'identité $(a^2 - b^2)^2 = (a - b)^4 + 4(a - b)^3 b + 4(a - b)^2 b^2$ pour établir que si $s \leq t$ on a

$$\mathbf{E} \left((W_t^2 - W_s^2)^2 \right) = 3(t - s)^2 + 4(t - s)s.$$

4.— Un trader a acheté un put dont le prix a été déterminé en utilisant le modèle de Black-Merton-Scholes (volatilité constante). On prendra $r = 0$ pour simplifier.

Le trader commence ses opérations de couverture à l'aide d'un portefeuille delta neutre. Pendant un court instant, dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + \Delta t] \subset [0, T]$, le prix du sous-jacent subit des variations d'amplitude anormalement élevée ; le trader suppose que la volatilité a doublé dans ce laps de temps.

a. Cet événement est-il favorable ou défavorable au trader ?

b. Évaluer, en fonction de S_{t_0} , σ , $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t_0, S_{t_0})$ et Δt , les gains ou les pertes engendrées par les opérations de couverture.
