

Épreuve du jeudi 13 décembre 2007
(durée : 2h)

1.— Soit $T > 0$ réel fixé : pour tout entier positif n et tout entier $j \in \{0, \dots, n\}$ on pose $t_j^n = j \frac{T}{n}$. On désigne par W un brownien standard et l'on rappelle que la somme $\sum_{j=0}^{n-1} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2$ converge vers T dans L^2 .

Déterminer la limite dans L^2 de

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} W_{t_{j+1}^n} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}).$$

(utiliser l'identité $b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2$)

2.— Soit X un processus d'Itô solution de l'équation différentielle stochastique

$$(E) \quad dX_t = X_t dt + dW_t, \quad X_0 \text{ donné.}$$

Comme d'habitude, W désigne un brownien standard. On pose $Y_t = e^{-t} X_t$.

a. Calculer dY_t à l'aide de la formule d'Itô. Le processus Y est-il une W -martingale ?

b. Montrer que la solution X de l'EDS (E) peut s'écrire

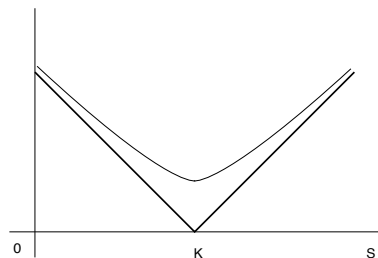
$$X_t = e^t X_0 + \Phi_t$$

où Φ_t est une intégrale stochastique que l'on précisera.

3.— Le diagramme ci-dessous est celui d'un straddle de strike K et de maturité T . On y a représenté le pay-off ainsi que les prix de l'option à une date intermédiaire $0 < t < T$ en fonction d'un sous-jacent S ne rendant pas de dividende.

On suppose pour simplifier que le rendement de l'actif non-risqué est nul : $r = 0$. On suppose aussi que $T - t$, le temps restant à la maturité, est petit et que l'option est à la monnaie : $S_t \approx K$.

Les réponses aux questions suivantes ne nécessitent aucun calcul.



a. Quel est le signe du theta de l'option ? ($\Theta = \frac{\partial f}{\partial t}$ où f désigne le prix de l'option)

Donner de même le signe du gamma ($\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$).

b. Un trader a vendu l'option et l'a couverte en achetant un portefeuille de réplcation (ψ, φ) : il possède donc un portefeuille composé de -1 option (soit une option vendue), d'une quantité ψ de bons du trésor et d'une quantité φ de sous-jacent (φ est le delta de la couverture).

Une soudaine augmentation de la volatilité est-elle favorable ou défavorable au trader ? (justifier la réponse, au besoin en s'aidant d'un dessin)