Épreuve du lundi 18 janvier 2010
(durée : 2h)

Dans tout ce qui suit, (W_t) désigne un brownien standard.

1.— Soit le processus défini par $Y_t = W_t^3 - 3tW_t$.
a. Déterminer l'EDS vérifiée par Y_t.
b. Le processus Y_t est-il une martingale (pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée à (W_t)) ?

2.— Soit (X_t) un processus vérifiant

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t \ , \ X_0 = x_0 \in \mathbf{R} \text{ donné},$$

où les constantes k et σ sont positives et θ est un réel quelconque fixé (processus d'Ornstein-Uhlenbeck).
a. Calculer à l'aide de la formule d'Itô la différentielle $d(e^{ks}X_s)$.
b. En intégrant sur $[0, t]$, déduire de la question précédente que X_t peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \phi(t) + \sigma e^{-kt} \int_0^t \psi(s) dW_s$$

où ϕ et ψ sont des *fonctions* (déterministes).
Donner les expressions de $\phi(t)$ et $\psi(s)$ en fonction des variables t et s et des paramètres k, θ et x_0.
c. Quel résultat général permet d'affirmer que la variable aléatoire X_t suit une loi normale ?
Calculer l'espérance de X_t.
d. En utilisant l'isométrie d'Itô, calculer la variance de X_t.

3.— On divise l'intervalle $[0, T]$ en n parties égales, on pose $t_i^n = iT/n$ et

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}^2 \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$$

où $W = (W_t)$ désigne un processus de Wiener.
Montrer que la suite $f_1, f_2, \ldots \in M_{\text{ét}}^2$ *approche* $f = W^2 \mathbf{1}_{[0,T[}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 \, dt \Big) = 0.$$

Indication : On montrera d'abord l'égalité $\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 \, dt\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}\big(|W_t^2 - W_{t_i^n}^2|^2\big) \, dt$ puis on utilisera l'identité $(a^2 - b^2)^2 = (a - b)^4 + 4(a - b)^3 b + 4(a - b)^2 b^2$ pour établir que si $s \le t$ on a

$$\mathbf{E}\Big((W_t^2 - W_s^2)^2 \Big) = 3(t - s)^2 + 4(t - s)s.$$
