

Épreuve du lundi 18 janvier 2010
(durée : 2h)

CORRIGÉ

Dans tout ce qui suit, (W_t) désigne un brownien standard.

1.— Soit le processus défini par $Y_t = W_t^3 - 3tW_t$.

a. Déterminer l'EDS vérifiée par Y_t .

b. Le processus Y_t est-il une martingale (pour la filtration (\mathcal{F}_t) associée à (W_t)) ?

Solution

a. On a $Y_t = f(t, W_t)$ avec $f(t, x) = x^3 - 3tx$. Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -3x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3t, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x.$$

Évidemment $dW_t = adt + bW_t$ avec $a = 0$ et $b = 1$ dans les notations habituelles. La formule d'Itô donne :

$$dY_t = (-3W_t + 0 + \frac{1}{2}6W_t)dt + (3W_t^2 - 3t)dW_t = 3(W_t^2 - t)dW_t.$$

b. Pas de drift pour Y_t , c'est donc une martingale.

2.— Soit (X_t) un processus vérifiant

$$dX_t = k(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbf{R} \text{ donné,}$$

où les constantes k et σ sont positives et θ est un réel quelconque fixé (processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK).

a. Calculer à l'aide de la formule d'Itô la différentielle $d(e^{ks}X_s)$.

b. En intégrant sur $[0, t]$, déduire de la question précédente que X_t peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \phi(t) + \sigma e^{-kt} \int_0^t \psi(s) dW_s$$

où ϕ et ψ sont des *fonctions* (déterministes).

Donner les expressions de $\phi(t)$ et $\psi(s)$ en fonction des variables t et s et des paramètres k , θ et x_0 .

c. Quel résultat général permet d'affirmer que la variable aléatoire X_t suit une loi normale ?

Calculer l'espérance de X_t .

d. En utilisant l'isométrie d'Itô, calculer la variance de X_t .

Solution

a. Posons $Z_s = e^{ks}X_s$. On a $Z_0 = x_0$ et $Z_s = f(s, X_s)$ avec $f(s, x) = e^{ks}x$. Avec les notations habituelles de la formule d'Itô, on a $a_s = k(\theta - X_s)$ et $b_s = \sigma$. On a donc

$$dZ_s = (ke^{ks}X_s + k(\theta - X_s)e^{ks} + 0)ds + \sigma e^{ks}dW_s = k\theta e^{ks}ds + \sigma e^{ks}dW_s$$

qui est un brownien affine.

b. En intégrant sur $[0, t]$ on trouve

$$(1) \quad Z_t = e^{kt} X_t = x_0 + k\theta \int_0^t e^{ks} ds + \sigma \int_0^t e^{ks} dW_s = x_0 + \theta(e^{kt} - 1) + \sigma \int_0^t e^{ks} dW_s$$

et par conséquent

$$(2) \quad X_t = \theta + e^{-kt}(x_0 - \theta) + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} dW_s.$$

Les fonctions ϕ et ψ de l'énoncé sont donc $\phi(t) = \theta + e^{-kt}(x_0 - \theta)$ et $\psi(s) = e^{ks}$.

c. On utilise le résultat général suivant : si $g(s)$ est une fonction déterministe de s alors pour tout t l'intégrale stochastique $\int_0^t g(s) dW_s$ est une variable normale (et centrée).

L'espérance de X_t est donc $\mathbf{E}(X_t) = \theta + e^{-kt}(x_0 - \theta)$.

d. Par l'isométrie d'Itô, la variance de X_t est

$$(3) \quad \mathbf{Var}(X_t) = \sigma^2 e^{-2kt} \int_0^t \mathbf{E}(e^{2ks}) ds = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2kt}).$$

3.— On divise l'intervalle $[0, T]$ en n parties égales, on pose $t_i^n = iT/n$ et

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}^2 \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$$

où $W = (W_t)$ désigne un processus de Wiener.

Montrer que la suite $f_1, f_2, \dots \in M_{\text{ét}}^2$ approche $f = W^2 \mathbf{1}_{[0, T[}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = 0.$$

Indication : On montrera d'abord l'égalité $\mathbf{E} \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}(|W_t^2 - W_{t_i^n}^2|^2) dt$ puis on utilisera l'identité $(a^2 - b^2)^2 = (a - b)^4 + 4(a - b)^3 b + 4(a - b)^2 b^2$ pour établir que si $s \leq t$ on a

$$\mathbf{E} \left((W_t^2 - W_s^2)^2 \right) = 3(t - s)^2 + 4(t - s)s.$$

Solution

On écrit d'abord $f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}^2 \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t)$ puisque $\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t) = \mathbf{1}_{[0, T[}$. Par conséquent

$$f(t) - f_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (W_t^2 - W_{t_i^n}^2) \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t).$$

Par Fubini on a $\mathbf{E} \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = \int_0^\infty \mathbf{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) dt$. On explicite d'abord l'espérance sous l'intégrale :

$$(4) \quad \mathbf{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) = \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} (W_t^2 - W_{t_i^n}^2) \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t) \right)^2 \right).$$

En développant le carré $(\sum_{i=0}^{n-1} (W_t^2 - W_{t_i^n}^2) \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}(t))^2$ les termes croisés disparaissent puisque les produits $\mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[} \times \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n[}$ sont nuls pour $i \neq j$. On trouve donc l'égalité annoncée

$$(5) \quad \mathbf{E} \left(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}((W_t^2 - W_{t_i^n}^2)^2) dt.$$

Dans chaque terme sous l'intégrale de l'égalité ci-dessus on a $t_i^n \leq t$. À l'aide de l'identité donnée dans l'indication on écrit

$$(6) \quad \mathbf{E}((W_t^2 - W_{t_i^n}^2)^2) = \mathbf{E}((W_t - W_{t_i^n})^4) + 4\mathbf{E}((W_t - W_{t_i^n})^3 W_{t_i^n}) + 4\mathbf{E}((W_t - W_{t_i^n})^2 W_{t_i^n}^2).$$

Examinons chacun des trois termes du membre de droite de cette égalité.

- Le premier terme est le moment d'ordre 4 d'une variable aléatoire normale d'écart-type $\sqrt{t - t_i^n}$; ce terme est donc égal à $3(t - t_i^n)^2$.
- Le deuxième terme peut s'écrire $4\mathbf{E}((W_t - W_{t_i^n})^3) \mathbf{E}(W_{t_i^n})$ en raison de la propriété d'indépendance des accroissements du Brownien; ce terme est nul (produit d'espérances nulles).
- Le dernier terme peut de même s'écrire $4\mathbf{E}((W_t - W_{t_i^n})^2) \mathbf{E}(W_{t_i^n}^2)$: c'est le produit des variances de deux accroissements du Brownien, il vaut $4(t - t_i^n)t_i^n$.

Finalement on trouve

$$(7) \quad \int_0^t \mathbf{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} 3(t - t_i^n)^2 dt + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} 4(t - t_i^n)t_i^n dt$$

soit

$$(8) \quad \int_0^t \mathbf{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^3 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} t_i^n (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 = n \left(\frac{T}{n}\right)^3 + n(n-1) \left(\frac{T}{n}\right) \left(\frac{T}{n}\right)^2.$$

Lorsque n tend vers l'infini on a

$$\int_0^t \mathbf{E}(|f(t) - f_n(t)|^2) \sim \frac{T^3}{n}$$

qui tend bien vers 0.