1.— Pour calculer le prix d'une option un opérateur a estimé que le prix de l'actif sous-jacent S suivait le modèle du brownien géométrique avec une volatilité de valeur σ. Pour simplifier, le taux sans risque r est supposé nul. On note $f(t, S_t)$ le prix de l'option à la date $t \in [0, T]$ où T désigne la date de maturité. A la date $t = 0$ l'opérateur vend une unité de cette option et commence ses opérations de couverture en delta. On suppose que le modèle estimé pour S était le bon, en particulier que la volatilité (implicite) valait bien σ, *sauf* dans une courte période $[t_0, t_0 + \Delta t] \subset [0, T]$ où la volatilité est passée brusquement de la valeur σ à la valeur 2σ.

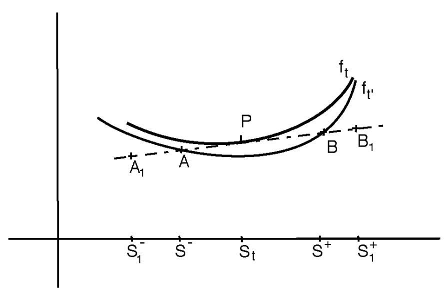
a. Cette augmentation de la volatilité est-elle favorable à l'opérateur ? (discuter selon le signe de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t_0, S_{t_0})$)

b. En considérant l'EDP de Black-Scholes, exprimer en fonction de S_{t_0}, σ, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t_0, S_{t_0})$ et Δt le montant des pertes ou des gains enregistrés par l'opérateur en raison de ce brusque saut de volatilité.

Solution.

a. On suppose le gamma $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$ positif, autrement dit le prix f_t de l'option est une fonction convexe du prix du sous-jacent S_t. En raison de la couverture en delta, la position du trader se situe sur la droite tangente au point P d'abscisse S_t à la courbe des prix d'option : comme il a vendu l'option, la décroissance de la valeur temporelle lui est favorable tant que le sous-jacent ne varie pas trop fortement.

Sur le graphique ci-dessous, l'axe vertical est celui des valeurs de l'option et de la couverture, l'axe horizontal porte les prix du sous-jacent aux dates t puis $t + \Delta t$.



À l'instant $t' = t + \Delta t > t$, et si la volatilité n'a pas bougé, la position du trader est proche de A ou B, c'est-à-dire qu'elle couvre encore le prix Black-Scholes $f_{t'}$ de l'option. En revanche, si la volatilité a augmenté, il faut s'attendre à des accroissements supérieurs du sous-jacent S : la position du trader est susceptible de se trouver en A_1 ou B_1, c'est à dire *en-dessous* du prix de l'option. Ainsi un trader short en gamma a tout à redouter d'une augmentation de la volatilité. C'est le cas si le trader est short sur une option convexe. Pour une position inverse en gamma, une augmentation de la volatilité aurait été favorable au trader.

b. Les gains et pertes engendrés par les ajustements de couverture dans une période temporelle Δt sont donnés (ou estimés) par le terme

$$\frac{1}{2}\Gamma_f \times (\Delta S)^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)\Delta t.$$

Si la volatilité glisse de la valeur σ à 2σ le trader enregistrera une perte de $\frac{3}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\Delta t$.

2.— On se place dans les conditions du modèle de Black-Scholes, dont on reprend les notations habituelles. On note $\tilde{S}_t = S_t / B_t$ le cours actualisé. On se place sous la probabilité risque neutre $\mathbf{Q}$, autrement dit on suppose que la dynamique stochastique de S est donnée par

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec $S_0 = s_0 > 0$ donné.

a. Déterminer l'EDS vérifiée par l'actif actualisé. Est-ce une W-martingale (sous la probabilité risque neutre) ?
b. Soit a un réel fixé ; on pose

$$f(t,x) = x^2 \exp\{\sigma^2(T-t)\} - 2ax + a^2.$$

Déterminer l'EDS vérifiée par $f(t,\tilde{S}_t)$; vérifier que c'est une martingale et montrer que

$$f(0,\tilde{S}_0) = \mathbf{E_Q}\big(f(t,\tilde{S}_t)\big).$$

c. En déduire l'égalité

$$\mathbf{E_Q}\big((\tilde{S}_T - a)^2\big) = s_0^2 \exp(\sigma^2 T) - 2as_0 + a^2.$$

d. Déterminer le prix d'une option européenne de maturité T, de sous-jacent S et de pay-off $(S_T - K)^2$, avec $K > 0$ donné.

Solution.
a. On applique la formule d'Itô avec la fonction $g(t,s) = e^{-rt}s$. On a $\frac{\partial g}{\partial t} = -rg$, $\frac{\partial g}{\partial s} = e^{-rt}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = 0$. On a donc

$$d\tilde{S}_t = \big(-re^{-rt}S_t + rS_t e^{-rt} + \frac{1}{2}\times 0\big)dt + \sigma S_t e^{-rt} dW_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t.$$

L'actif actualisé $\tilde{S}_t$ est un processus d'Itô sans drift, donc une martingale.
b. On a $\frac{\partial f}{\partial t} = -\sigma^2 x^2 \exp\{\sigma^2(T-t)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\exp\{\sigma^2(T-t)\} - 2a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\exp\{\sigma^2(T-t)\}$. Par application de la formule d'Itô, on obtient, en posant $f_t = f(t,\tilde{S}_t)$:

$$\begin{aligned} df_t &= \Big(-\sigma^2 \tilde{S}_t^2 \exp\{\sigma^2(T-t)\} + 0\times\big(2\tilde{S}_t \exp\{\sigma^2(T-t)\} - 2a\big) + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{S}_t^2 \times 2\exp\{\sigma^2(T-t)\}\Big)dt \\ &\qquad + \sigma \tilde{S}_t \times \big(2\tilde{S}_t \exp\{\sigma^2(T-t)\} - 2a\big)dW_t \\ &= 2\sigma \tilde{S}_t \times \big(\tilde{S}_t \exp\{\sigma^2(T-t)\} - a\big)dW_t. \end{aligned}$$

Comme f_t est sans drift, c'est une martingale. En particulier $f_0 = \mathbf{E_Q}\big(f_t\big)$ pour tout t.
c. On a $f(T,x) = x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$donc $f_T = (\tilde{S}_T - a)^2$. En appliquant la dernière égalité de la question précédente, on trouve

$$\mathbf{E_Q}\big(f_T\big) = \mathbf{E_Q}\big((\tilde{S}_T - a)^2\big) = f_0 = s_0^2 \exp(\sigma^2 T) - 2as_0 + a^2.$$

d. On sait que le prix de l'option à la date $t = 0$ est $F = e^{-rt}\mathbf{E_Q}\big((S_T - K)^2\big)$. En écrivant $S_T = e^{rT}\tilde{S}_T$ et $K = e^{rT}e^{-rt}K$, on trouve

$$F = e^{rT}\mathbf{E_Q}\big((\tilde{S}_T - e^{-rt}K)^2\big)$$

et en utilisant le calcul de la question précédente avec $a = e^{-rt}K$:

$$F = e^{(r+\sigma^2)T}s_0^2 - 2Ks_0 + e^{-rT}K^2.$$

3.— Avec les notations habituelles, montrer que $S_t\Phi(d_1) > C_t$ où C désigne un call vanille européen construit sur S. En déduire que si $\Delta S > 0$ alors

$$\frac{\Delta C}{C} > \frac{\Delta S}{S}$$

où ΔS désigne un accroissement de S et ΔC l'accroissement correspondant du call (effet de levier).

Solution. La formule de Black-Scholes pour un call européen donne, avec les notations habituelles,

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) < S\Phi(d_1), \text{ donc } \frac{S}{C} > \frac{1}{\Phi(d_1)}.$$

On a dautre part $\dfrac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1)$. En passant aux accroissements, on obtient

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C}{\Delta S}\times\frac{S}{C}\times\frac{\Delta S}{S}$$

et l'on conclut avec l'égalité au premier ordre $\Delta C = \Phi(d_1)\Delta S$.

4.— Un call européen (sur un actif dont le prix S est supposé suivre le modèle du brownien géométrique) est évalué sur le marché à 2,5 €. Le prix inital du sous-jacent est $S_0 = 15$ €, le prix strike est $K = 13$ €, la date de maturité est à trois mois (*i.e.* $T = 0{,}25$ année) et le taux d'intérêt sans risque est $r = 5\%$ par an. En utilisant les formules de Black-Scholes, montrer que la volatilité "implicite" est comprise entre 0,35 et 0,40.

Solution. Pour $\sigma = 0{,}35$, volatilité annuelle, on trouve $d_1 = 0{,}977$ et $d_2 = 0{,}802$, ce qui donne $\Phi(d_1) = 0{,}836$ et $\Phi(d_2) = 0{,}788$. On calcule alors le prix du call pour la volatilité la plus basse : $c^- = 2{,}42$ €.
Pour une volatilité $\sigma = 0{,}40$, on trouve : $d_1 = 0{,}878$, $d_2 = 0{,}678$, $\Phi(d_1) = 0{,}810$ et $\Phi(d_2) = 0{,}750$. Le calcul du call donne alors $c^+ = 2{,}52$ €.
Sur le marché, le call est évalué à $2,5$ €. Comme le prix du call est une fonction strictement croissante de la volatilité du sous-jacent — le vega $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$d'un call est égal à $S_t\sqrt{T-t}\Phi'(d_1) > 0$ (même vega pour le put) — la volatilité implicite est comprise entre les deux valeurs 0,35 et 0,40.

5.— Soit une action dont le prix S possède une dynamique de brownien géométrique. Le prix spot est $S_0 = 50$ €, le retour espéré annuel μ est de 16% et la volatilité σ de 30%. En utilisant la distribution de la variable aléatoire $Y_T = \ln S_T$, donner un intervalle de confiance à 90% pour S_T lorsque $T = 2$ ans.

6.— Le tableau suivant, censé montrer les prix de calls européens à différentes maturités et pour différents prix d'exercice, tous placés sur un même actif de prix initial 50 €, n'est pas en accord avec les formules de Black-Scholes :

	Maturité (mois)		
Prix Strike	**3**	**6**	**12**
45	1,6	2,9	5,1
50	3,7	5,2	7,5
55	7,0	8,3	10,5

En justifiant *brièvement* et *sans aucun calcul* votre réponse, dites pourquoi ce tableau est incorrect.

Solution. Le prix du call décroît si le strike augmente, puisqu'il tend alors à se retrouver plus profondément hors la monnaie. Le tableau est donc faux car il montre un prix de call croissant en fonction du strike.
Remarques :
On peut aussi montrer que $\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) < 0$ en utilisant la relation $S\Phi'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)$ et le fait que d_1 et d_2 ont même dérivée par rapport à K.
En ce qui concerne la dépendance vis-à-vis de la maturité, le tableau est cohérent. En effet le theta d'un call, c'est-à-dire sa dérivée par rapport au temps t, est donné par la formule

$$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\sigma S\Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - re^{-r(T-t)}K\Phi(d_2) < 0.$$

Le call est donc une fonction croissante du temps restant à l'expiration.

7.— On rappelle que le gamma d'une option (ou d'un portefeuille) de valeur f sur un sous-jacent S est la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$, c'est-à-dire la dérivée du delta de l'option ou du portefeuille par rapport à S.

a. Calculer le delta et le gamma du sous-jacent. Montrer que le gamma d'un call vanille européen C est égal à

$$\Gamma_C = \frac{\Phi'(d_1)}{s\sigma\sqrt{T-t}}$$

où σ désigne la volatilité du sous-jacent. Tracer l'allure de son graphe en fonction de $s = S_t$.

b. Afin de se prémunir contre les variations importantes du delta d'une option f que l'on veut couvrir en delta neutre, on décide de couvrir l'option en delta-gamma neutres. Pour cela on considère une option g, *différente* de f mais construite sur le même sous-jacent S, que l'on achète ou vend (short) en quantité ψ_g telle que le portefeuille formé de l'option f et de cette quantité d'option g soit gamma neutre. On incorpore ensuite à ce portefeuille une quantité ψ_S de sous-jacent (notez que ψ_S peut être négative) de manière à obtenir un portefeuille delta neutre. Montrer que l'on a nécessairement

$$\psi_g = -\frac{\Gamma_f}{\Gamma_g} \quad et \quad \psi_S = \frac{\Delta_g \Gamma_f}{\Gamma_g} - \Delta_f$$

et que ces quantités fournissent bien une couverture en delta et gamma neutres de l'option f.

c. On considère un portefeuille P formé de dérivés construits sur un même sous-jacent dans le modèle de Black-Scholes. On suppose que P est autofinancé, delta neutre et gamma neutre et que sa valeur est solution de l'équation de Black-Scholes. Montrer que ce portefeuille réplique l'actif non-risqué.

8.— Vous avez vendu une option européenne dont la valeur est donnée par une fonction $f(t, s)$: précisément $f(t, s)$ représente la valeur à la date t sachant que $S_t = s$; cette fonction f dépend également bien sûr de σ et r. À une certaine date t, votre intuition vous fait pressentir une variation brusque de la volatilité dans un bref délai (sans que vous sachiez si cette volatilité va monter ou descendre). Afin de vous couvrir au premier ordre contre une telle variation de la volatilité, vous décidez d'acquérir une certaine quantité d'un call de valeur c disponible sur le marché. Exprimer, en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}(t, S_t)$ et $\dfrac{\partial c}{\partial \sigma}(t, S_t)$, la quantité de call qu'il vous semble le plus adéquat d'acquérir dans ce but.

Montrer en outre que

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma}(t, S_t) = S_t \Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$$

(la dérivée par rapport à σ d'un dérivé est appelée le *vega* du dérivé, noté $\mathcal{V}$) et tracer l'allure de son graphe en tant que fonction de $s = S_t$.