Calcul de $\int_0^T W_t^2\,dW_t$

Dans tout ce qui suit, $(W_t)_{t\geq 0}$ désigne un processus de Wiener sous une probabilité donnée $\mathbf{P}$ et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration associée.

On divise l'intervalle $[0,T]$ en n parties égales, on pose $t_i^n = iT/n$ et

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}^2 \mathbf{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}$$

a. On montre d'abord que la suite $f_1, f_2, \ldots \in M^2_{\text{ét}}$ approche $f = W_t^2 \mathbf{1}_{]0,T]}$. Vérifier, en utilisant Fubini, l'égalité

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2\,dt\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}\big(|W_t^2 - W_{t_i^n}^2|^2\big)\,dt.$$

en écrivant $f(t) - f_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (W_t^2 - W_{t_i^n}^2)\mathbf{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}$.

Utiliser ensuite l'identité familière $(a^2-b^2)^2 = (a-b)^4 + 4(a-b)^3 b + 4(a-b)^2 b^2$ pour en déduire

$$\mathbf{E}\Big((W_t^2 - W_s^2)^2\Big) = 3(t-s)^2 + 4(t-s)s$$

puis

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty |f(t) - f_n(t)|^2\,dt\Big) = \frac{T^3}{n}$$

et conclure.

b. Utiliser maintenant l'identité bien connue $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$ pour calculer $I(f_n) = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}^2 \big(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big)$ que l'on réécrira sous la forme

$$I(f_n) = \frac{1}{3}W_T^3 - \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(t_{i+1}^n - t_i^n) - \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}\Big[\big(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big)^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)\Big] - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\big(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big)^3.$$

Dans la suite on examine la limite L^2 de chacune des trois sommes de l'égalité ci-dessus.

c. Montrer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(t_{i+1}^n - t_i^n) = \int_0^T W_t\,dt$$

en justifiant le calcul suivant :

$$\mathbf{E}\Big(\Big|\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(t_{i+1}^n - t_i^n) - \int_0^T W_t\,dt\Big|^2\Big) \leq 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbf{E}\big(|W_t - W_{t_i^n}|^2\big)\,dt = \frac{T^2}{n} \to 0.$$

d. Montrer que l'on peut écrire

$$\mathbf{E}\Big(\Big|\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}\Big[\big(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big)^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)\Big]\Big|^2\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}(W_{t_i^n}^2)\,\mathbf{E}\Big(\Big|\big(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\big)^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)\Big|^2\Big)$$

et en déduire que la deuxième somme vaut

$$\frac{(n-1)T^3}{n^2} \to 0.$$

e. Pour la troisième somme, montrer de même que l'espérance de son carré vaut $15\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n)^3 = \frac{15T^3}{n^2} \to 0$, sachant que le moment d'ordre 6 d'un variable aléatoire $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$ est $15\sigma^6$.

f. On obtient finalement

$$\int_0^T W_t^2\,dW_t = \frac{1}{3}W_T^3 - \int_0^T W_t\,dt.$$

Écrire ce résultat sous la forme d'une EDS vérifiée par W_t^3. Retrouver cette équation à l'aide de la formule d'Itô.
