

CALLS BINAIRES
(quelques calculs)

1. Le delta d'un call binaire de prix d'exercice K et dont le pay-off consiste en un paiement de cash de 1 € est donné par la formule

$$\Delta_{callbin} = e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \frac{1}{s\sigma\sqrt{\tau}}$$

où s est une valeur de S , $\tau = T - t$, le temps restant à l'échéance, et

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \log \frac{s}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \right\}.$$

2. Lorsque l'option est à la monnaie, $s = K$ et la formule pour d_2 devient

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \right\} = \frac{1}{\sigma} \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{\tau} \right\}.$$

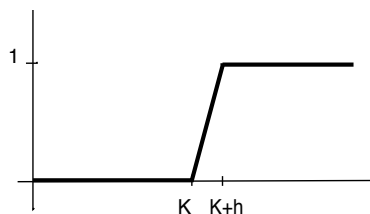
Lorsque τ tend vers 0, d_2 aussi et par conséquent

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta_{callbin} = \lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-r\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{2\sigma^2}} \frac{1}{s\sigma\sqrt{\tau}} = +\infty.$$

3. Lorsque $s \neq K$ et $\tau \rightarrow 0$ on a $d_2^2 \sim \frac{1}{\sigma^2\tau} \left(\log \frac{s}{K}\right)^2 \rightarrow +\infty$ et par conséquent $\lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-d_2^2/2} = 0$. Par croissance comparée $e^{-d_2(\tau)^2/2}$ tend vers 0 plus rapidement que $\sqrt{\tau}$, donc

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta_{callbin} = 0.$$

4. Pour couvrir un call binaire, on l'approche par une quantité de $1/h$ spreads verticaux (haussiers) de prix d'exercice $K_1 = K$ et $K_2 = K + h$ où h représente le *tick minimum* imposé par la Bourse(*). Le pay-off terminal est dessiné ci-dessous :



Ainsi, le call K binaire est répliqué en prenant une position longue sur $1/h$ calls K vanille et une position courte sur $1/h$ calls $K + h$ vanille. Si une règle de tick minimum n'est pas présente sur le marché, cette réplique est en réalité une approximation du call binaire.

(*) si cette règle de tick existe bien sur ce marché ; par définition, si le prix du sous-jacent à la date t est S_t , le prix à l'instant suivant $t + \delta t$ ne peut être que $S_{t+\delta t} = S_t + ih$ où i est un entier relatif