

COUVERTURE DELTA-GAMMA

1. On suppose donné un sous-jacent S et une option f construite sur S , ou plus généralement un portefeuille P dont la partie risquée est construite sur S (un tel portefeuille peut contenir du non-risqué, du sous-jacent et des dérivés sur le sous-jacent). Pour se constituer à partir de P un portefeuille V à la fois delta et gamma neutre, il faudra utiliser deux dérivés F et G dans la couverture (par exemple deux calls avec des prix d'exercice différents ou bien des maturités différentes). Soient φ_F et φ_G les quantités de F et de G incorporées. On convient de noter par la même lettre l'actif et sa valeur en euros.

La valeur du portefeuille couvert est donc

$$V(t, s) = P(t, s) + \varphi_F \times F(t, s) + \varphi_G \times G(t, s)$$

où s représente une valeur de S (à la date t).

2. Les quantités φ_F et φ_G doivent être ajustées de telle manière que

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0.$$

On obtient donc le système linéaire

$$\begin{aligned} \Delta_P + \varphi_F \times \Delta_F + \varphi_G \times \Delta_G &= 0 \\ \Gamma_P + \varphi_F \times \Gamma_F + \varphi_G \times \Gamma_G &= 0 \end{aligned}$$

que l'on peut résoudre facilement.

3. On serait tenté de commencer par déterminer la quantité φ_F de F telle que le portefeuille $V_1 = (P, F)$ soit delta neutre ; ce portefeuille n'étant généralement pas gamma neutre, on ajouterait à V_1 une quantité φ_G de dérivé G qui rendrait ce portefeuille gamma neutre. Le problème est qu'en incorporant G à V_1 on détruit la delta neutralité de V_1 .

On procède donc comme suit : on constituera d'abord (P, F) gamma neutre puis on y incorporera, comme dérivé G , le sous-jacent lui-même en quantité nécessaire pour obtenir un portefeuille delta neutre. Comme le gamma du sous-jacent est nul, cela ne détruira pas la gamma neutralité initiale.

La valeur du portefeuille couvert sera alors

$$V(t, s) = P(t, s) + \varphi_F \times F(t, s) + \varphi_S \times s.$$

Le delta de S étant égal à 1, on aura donc à résoudre le système

$$\begin{aligned} \Delta_P + \varphi_F \times \Delta_F + \varphi_S &= 0 \\ \Gamma_P + \varphi_F \times \Gamma_F &= 0 \end{aligned}$$

dont on tire

$$\varphi_F = -\frac{\Gamma_P}{\Gamma_F} \quad \text{et} \quad \varphi_S = \frac{\Delta_F \times \Gamma_P}{\Gamma_F} - \Delta_P.$$

4. Cette méthode se généralise et permet de déterminer un schéma de couverture susceptible de rendre un portefeuille neutre vis-à-vis de n'importe quelle grecque.

(d'après BJÖRK T., *Arbitrage Theory in Continuous Time, 2nd edition*, Oxford, OUP, 2004 ; pp 126-130)