Options sur futures : formule de Black (1976)

1. Un *contrat futures* est un engagement à vendre ou à acheter un actif à une date et pour un prix fixés à l'avance. Ces contrats sont négociés sur les marchés organisés. Le *prix futures,* c'est-à-dire le prix auquel les parties se sont engagées à acheter ou à vendre l'actif, est déterminé sur un marché de futures selon la loi de l'offre et de la demande.
La valeur d'un contrat futures est nulle à la date où il est écrit. Ce contrat est l'objet d'un règlement quotidien : au jour j le détenteur du contrat reçoit de la part du vendeur la somme $f(j) - f(j-1)$ € où $f(j)$ représente le prix futures au jour j. Cette somme est versée sur son compte de marge, lequel est tenu par un courtier auprès de la Bourse (procédure *mark to market*). Évidemment, lorsque ce montant est négatif le détenteur *verse* cette somme au compte du vendeur. Ces comptes sont rémunérés au taux du marché monétaire.

2. Le modèle de marché de Black.

Soit $f_S(t, T^*)$ le prix futures à la date $t \in [0, T^*]$ et pour la date T^* d'un actif S donné. La dynamique stochastique de ce prix futures $f_t = f_S(t, T^*)$ est donnée par

$$df_t = \mu_f\, f_t\, dt + \sigma_f\, f_t\, dW_t, \quad f_0 > 0 \tag{1}$$

avec μ_f et $\sigma_f > 0$ réels donnés. La solution de cette EDS est

$$f_t = f_0 \exp\big((\mu_f - \frac{1}{2}\sigma_f^2)\, t + \sigma_f\, W_t\big). \tag{2}$$

Sur le marché Black est aussi présent l'actif sans risque, noté B, dont le prix à la date t est donné par $B_t = e^{rt}$; ici r représente le taux d'intérêt court-terme, supposé constant sur la période $[0, T^*]$ considérée.

3. Ce marché est supposé sans opportunité d'arbitrage. Dans ces conditions, le bon zéro-coupon unité de maturité T^* (payant donc 1 € à cette date) a pour prix $B(t, T^*) = e^{-r(T^*-t)}$ à une date intermédiaire t.
Le prix forward de S à la date t pour la maturité T^* est $F_S(t, T^*) = S_t/B(t, T^*) = S_t e^{r(T^*-t)}$. Lorsque le taux d'intérêt est constant, ou plus généralement si c'est un processus *prévisible,* les prix futures et forward coïncident : $f_S(t, T^*) = F_S(t, T^*)$.

Dans les hypothèses de marché Black-Scholes, le sous-jacent S a pour dynamique

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t, \quad S_0 > 0. \tag{3}$$

La formule d'Itô donne alors

$$df_t = (\mu - r)\, f_t\, dt + \sigma\, f_t\, dW_t, \quad f_0 = S_0 e^{rT^*} \tag{4}$$

et par conséquent f vérifie l'équation (1) avec $\mu_f = \mu - r$ et $\sigma_f = \sigma$.

Soit un call européen de maturité T écrit sur un futures $f_t = f_S(t, T^*)$ de maturité $T^* \geq T$. Si $T = T^*$ le prix de ce call peut être obtenu directement à partir des formules de Black-Scholes en posant $S_t = f_t e^{-r(T^*-t)}$; on notera qu'à l'expiration on a $f_T = S_T$ et que par conséquent les pay-offs des calls sont identiques.
En général on a $T^* > T$; dans ce cas le pay-off du call sur futures peut s'écrire

$$c_T^f = \big(f_S(T, T^*) - K\big)_+ = e^{r(T^*-T)}\big(S_T - Ke^{-r(T^*-T)}\big)_+ \tag{5}$$

en supposant que les prix forward et futures sont identiques, et l'on peut encore évaluer l'option sur futures comme si c'était un call sur le prix spot de S.
La démonstration proposée ci-dessous ne supposera pas l'égalité des prix forward et futures.

4. Le résultat principal est le suivant (*) :

Le prix d'arbitrage $c(f,t)$ à la date t d'un call futures européen de date d'expiration T et de prix strike K est donné par

$$c(f_t,t) = e^{-r(T-t)}\Big(f_t N\big(d_1(f_t,T-t)\big) - KN\big(d_2(f_t,T-t)\big)\Big) \tag{6}$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\log(f/K) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}. \tag{7}$$

La stratégie sur futures qui réplique un call européen sur futures est, pour $0 \leq t \leq T$:

$$\varphi_t = \frac{\partial c}{\partial f}(f_t,t), \quad \psi_t = e^{-rt}c(f_t,t). \tag{8}$$

5. Stratégie sur futures autofinancée.

La procédure de règlement quotidien indiquée au point **1.** se traduit, pour un accroissement temporel arbitraire δt et pour le prix Φ_t d'un *contrat* futures écrit à la date t, par les égalités

$$\Phi_t = 0 \quad \text{et} \quad d\Phi_t = \Phi_{t+\delta t} - \Phi_t = f_{t+\delta t} - f_t = df_t. \tag{9}$$

On appelle *stratégie sur futures* un portefeuille $V = (g,h)$ où g et h sont des processus qui représentent respectivement des quantités de contrats futures Φ et d'actif non-risqué B. Ces quantités peuvent être positives ou négatives selon qu'elles indiquent une position longue ou courte sur l'actif correspondant. On note V_t la valeur de ce portefeuille.
Comme il ne coûte rien d'entrer dans un contrat futures, la valeur de ce portefeuille est

$$V_t = h_t\, B_t. \tag{10}$$

On dit que la stratégie est *autofinancée* si l'on a

$$dV_t = g_t\, df_t + h_t\, dB_t \tag{11}$$

pour tout $t \in [0,T]$, où T est la date d'expiration d'une option sur le prix futures f $(T < T^*)$.

6. Preuve des formules de Black.

On suppose que le prix du call est une fonction de t et de f_t : $c_t = c(f_t,t)$. On considère une stratégie sur futures autofinancée qui réplique le call. On suppose en outre que les quantités g_t et h_t sont elles aussi des fonctions de t et de f_t. On a donc, d'après ce qui précède :

$$V_t = h(f_t,t)\, B_t = c(f_t,t) \tag{12}$$

et

$$dV_t = g(f_t,t)\, df_t + h(f_t,t)\, dB_t = \big(f_t\, \mu\, g(f_t,t) + r\, c(f_t,t)\big)\, dt + f_t\, \sigma\, g(f_t,t)\, dW_t. \tag{13}$$

Dans cette dernière égalité on a utilisé (12) avec $dB_t = rB_t dt$ ainsi que (1) où l'on a écrit μ et σ à la place respectivement de μ_f et σ_f dans un souci d'allègement.

(*) Black F., *The pricing of commodity contracts,* Journal of Financial Economics, 3, 167-179.

Par ailleurs, en appliquant la formule d'itô à la fonction c de f_t on trouve

$$dc(f_t,t) = \Big(\frac{\partial c}{\partial t}(f_t,t) + \mu\, f_t\, \frac{\partial c}{\partial f}(f_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2\, f_t^2\, \frac{\partial^2 c}{\partial f^2}(f_t,t)\Big)\, dt + \sigma\, f_t\, \frac{\partial c}{\partial f}(f_t,t)\, dW_t. \tag{14}$$

De (13) et (14) on déduit que la différentielle d'Itô du processus $Y_t = c(f_t,t) - V_t$ est

$$\begin{aligned} dY_t = \Big(\frac{\partial c}{\partial t}(f_t,t) + \mu\, f_t\, \Big(\frac{\partial c}{\partial f}(f_t,t) - g(f_t,t)\Big) + \frac{1}{2}\sigma^2\, f_t^2\, \frac{\partial^2 c}{\partial f^2}(f_t,t) - r\, c(f_t,t)\Big)\, dt \\ +\sigma\, f_t\, \Big(\frac{\partial c}{\partial f}(f_t,t) - g(f_t,t)\Big)\, dW_t = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

On choisit

$$g(f_t,t) = \frac{\partial c}{\partial f}(f_t,t) \tag{16}$$

pour annuler la partie stochastique ; on obtient alors l'EDP de Black

$$\frac{\partial c}{\partial t}(f_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2\, f_t^2\, \frac{\partial^2 c}{\partial f^2}(f_t,t) - r\, c(f_t,t) = 0 \tag{17}$$

dont le prix du call $c(f_t,t)$ est solution.
On peut alors utiliser la formule de Feynman-Kač ou bien vérifier directement que les formules (6) et (7) fournissent la solution de (17).

7. La méthode utilisée ci-dessus s'étend aux options européennes sur les prix futures. Le prix $v(f_t,t)$ d'une option européenne sur f de pay-off $v_T = k(f_T)$ donné vérifiera l'EDP de Black

$$\frac{\partial v}{\partial t}(f_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2\, f_t^2\, \frac{\partial^2 v}{\partial f^2}(f_t,t) - r\, v(f_t,t) = 0 \tag{18}$$

avec la condition terminale $v(f_T,T) = k(f_T)$.
Considérons par exemple un put de même strike et même échéance sur le prix futures f. On montre par un raisonnement d'arbitrage la relation de parité call-put pour les options sur futures :

$$c(f_t,t) - p(f_t,t) = e^{-r(T-t)}(f_t - K). \tag{19}$$

On en déduit le prix du put sur futures :

$$p(f_t,t) = e^{-r(T-t)}\Big(KN\big(-d_2(f_t,T-t)\big) - f_t N\big(-d_1(f_t,T-t)\big)\Big) \tag{20}$$

(d'après Musiela M., Rutkowski M., *Martingale Methods in Financial Modelling, 2nd edition, corrected 2nd printing,* Berlin, Springer, 2007 ; pp 130-134)