Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Soient s et t deux réels positifs. Montrer que la covariance de W_s et W_t est le plus petit des deux nombres s et t.

2.— Vérifier que la variance de W_s^2 est égale à $2s^2$.

3.— On considère le processus Z défini par $Z_t = \sqrt{t}Y$, où Y suit une loi normale standard. Déterminer les lois marginales de Z. Le processus Z est-il un processus de Wiener ?

4.— Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X > 0$ dont le logarithme suit une loi normale de paramètres μ et σ^2.

5.— Soit $T > 0$ un réel fixé. Pour tout entier positif n on considère une subdivision

$$\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \ldots < t_N^n = T\}$$

de l'intervalle $[0, T]$ (l'entier N dépend de la subdivision). On suppose que le pas de la subdivision, $\delta_n = \max_{0\leq j\leq N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)$, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

a. Montrer que la somme $\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2$ converge dans L^2 vers la limite T.

b. On considère les limites dans L^2

$$I = \lim_n S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

et

$$J = \lim_n T_n \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_{j+1}^n}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}).$$

Calculer $J - I$ et $I + J$. En déduire la valeur de I et J.

c. Vérifier que la suite de fonctions simples définie par

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n}\mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n[}(t)$$

approche $f(t) = W_t$ dans $\mathbf{M}_T^2$.
En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^T W_s\,dW_s.$$

d. Calculer la limite dans L^2 de la somme

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(W_{t_j^n} + W_{t_{j+1}^n})}{2}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

(intégrale de Stratonovitch).

6.— Montrer à l'aide de la formule d'Itô que pour tout $t > 0$ on a

$$\int_0^t s\,dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\,ds.$$

7.— Montrer l'égalité

$$\int_0^t W_s^2\,dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s\,ds.$$

8.— Calculer l'espérance de W_t^6 en utilisant la formule d'Itô et le fait qu'une intégrale stochastique est une martingale pour la filtration associée à W.

9.— Calculer la variance de $\int_0^t |W_s|^{1/2}\,dW_s$ en utilisant l'isométrie d'Itô.

10.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}2\times S_t\,dt + 0{,}4\times S_t\,dW_t$$

avec $S_0 = 100$ € et où les coefficients 0,2 et 0, 4 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S.

Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 160 € au bout d'un an.

11.— Soit une action dont le prix S possède une dynamique de brownien géométrique. Le prix spot est $S_0 = 50$ €, le rendement espéré annuel μ est de 16% et la volatilité de ce rendement σ de 30%. En utilisant la distribution de la variable aléatoire $Y_T = \ln S_T$, donner un intervalle de confiance à 90% pour S_T lorsque $T = 2$ ans.

12.— On désigne par S_t la valeur à la date t d'un dollar en euros (le cours du dollar), avec $S_0 > 0$. On suppose que la dynamique de ce cours est celle d'un brownien géométrique de rendement annuel μ et de volatilité σ.

a. Déterminer l'EDS satisfaite par le cours $Z = 1/S$ de l'euro en dollars.
b. Déduire de l'équation satisfaite par $U = \log S$ celle satisfaite par $V = \log Z$.
c. Retrouver l'équation satisfaite par Z en calculant la différentielle d'Itô de e^V.
