Corrigé

Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Soient s et t deux réels positifs. Montrer que la covariance de W_s et W_t est le plus petit des deux nombres s et t.

Solution
On suppose $s < t$ et on écrit $W_t = W_t - W_s + W_s$. On a alors :

$$\mathbf{cov}(W_s, W_t) = \mathbf{E}\big(W_s W_t\big) = \mathbf{E}\big(W_s(W_t - W_s)\big) + \mathbf{E}\big(W_s^2\big) \tag{1}$$

puisque toutes les variables concernées sont centrées. Les accroissements $W_t - W_s$ et $W_s - W_0 = W_s$ sont indépendants donc l'espérance du produit est le produit des espérances. Ces dernières sont nulles, à nouveau en raison du caractère centré des variables. La variance de W_s étant égale à s, on trouve finalement

$$\mathbf{cov}(W_s, W_t) = s = s \wedge t. \tag{2}$$

2.— Vérifier que la variance de W_s^2 est égale à $2s^2$.

Solution
On a

$$\mathbf{Var}(W_s^2) = \mathbf{E}(W_s^4) - \mathbf{E}(W_s^2)^2 = \mathbf{E}(W_s^4) - s^2 \tag{3}$$

puisque $\mathbf{E}(W_s^2) = \mathbf{Var}(W_s) = s$. Il reste à calculer $\mathbf{E}(W_s^4)$.
Pour une variable aléatoire quelconque X à densité f_X on a

$$\mathbf{E}(h(X)) = \int_{\mathbf{R}} h(x) f_X(x)\, dx. \tag{4}$$

pour h fonction mesurable. Ainsi, avec $h(x) = x^4$ et $X = W_s$

$$\mathbf{E}(W_s^4) = \int_{\mathbf{R}} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/2s}\, dx. \tag{5}$$

Par une intégration par parties

$$\mathbf{E}(W_s^4) = \Big[-s x^3 e^{-x^2/2s}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + 3s \int_{\mathbf{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/2s}\, dx. \tag{6}$$

L'intégrale du second membre est égale à s, la variance de W_s. Le terme tout intégré est nul (croissance comparée à l'infini de l'exponentielle et d'un polynôme). On trouve donc

$$\mathbf{E}(W_s^4) = 3s^2 \tag{7}$$

et par conséquent

$$\mathbf{Var}(W_s^2) = 3s^2 - s^2 = 2s^2. \tag{8}$$

3.— On considère le processus Z défini par $Z_t = \sqrt{t}Y$, où Y suit une loi normale standard. Déterminer les lois marginales de Z. Le processus Z est-il un processus de Wiener ?

Solution

Comme Y est $\mathcal{N}(0;1)$ (normale d'espérance 0 et de variance 1) la variable Z_t est normale centrée de variance $(\sqrt{t})^2 = t$. Le processus Z a donc les mêmes marginales qu'un processus de Wiener.

Cependant Z n'est pas un processus de Wiener, comme on peut le voir en calculant les covariances

$$\mathbf{cov}\big(Z_s, Z_t\big) = \mathbf{cov}\big(\sqrt{s}Y, \sqrt{t}Y\big) = \sqrt{st} \neq s \wedge t. \tag{9}$$

On aurait aussi pu remarquer que le processus Z n'est ni stationnaire ni à accroissements indépendants.

4.— Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X > 0$ dont le logarithme suit une loi normale de paramètres μ et σ^2.

Solution

La densité de $Y = \log X$ est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big). \tag{10}$$

En utilisant l'égalité (4) on a donc

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\big(e^Y\big) = \int_{\mathbf{R}} e^y . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)\,dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + y\Big)\,dy. \tag{11}$$

On écrit ensuite

$$-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + y = -\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\big(y - (\mu+\sigma^2)\big)^2 - (\mu+\sigma^2)^2 + \mu^2\Big) \tag{12}$$

soit

$$-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + y = -\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\big(y - (\mu+\sigma^2)\big)^2 - 2\sigma^2(\mu+\sigma^2/2)\Big) = -\frac{1}{2\sigma^2}\big(y - (\mu+\sigma^2)\big)^2 + \mu + \sigma^2/2. \tag{13}$$

Par conséquent

$$\mathbf{E}(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{\big(y-(\mu+\sigma^2)\big)^2}{2\sigma^2}\Big)\,dy. \tag{14}$$

L'intégrand est une densité : son intégrale vaut 1, donc

$$\mathbf{E}(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}. \tag{15}$$

On calcule maintenant la variance. On a $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ et il reste à calculer le terme $\mathbf{E}(X^2)$. On a

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}\big(e^{2Y}\big). \tag{16}$$

On pose $Z = 2Y$, variable aléatoire normale d'espérance 2μ et de variance $4\sigma^2$, à laquelle on applique le résultat (21) ci-dessus avec 2μ et $4\sigma^2$ à la place de μ et σ. On trouve immédiatement :

$$\mathbf{E}(X^2) = e^{2(\mu+\sigma^2)} \quad \text{et par conséquent} \quad \mathbf{Var}(X) = e^{2(\mu+\sigma^2/2)}\big(e^{\sigma^2} - 1\big). \tag{17}$$

5.— Soit $T > 0$ un réel fixé. Pour tout entier positif n on considère une subdivision

$$\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \ldots < t_N^n = T\}$$

de l'intervalle $[0,T]$ (l'entier N dépend de la subdivision). On suppose que le pas de la subdivision, $\delta_n = \max_{0\le j\le N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)$, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

a. Montrer que la somme $\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2$ converge dans $\mathbf{L}^2$ vers la limite T.

b. On considère les limites dans $\mathbf{L}^2$

$$I = \lim_n S_n \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

et

$$J = \lim_n T_n \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_{j+1}^n}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}).$$

Calculer $J - I$ et $I + J$. En déduire la valeur de I et J.

c. Vérifier que la suite de fonctions simples définie par

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^{N-1} W_{t_j^n}\mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n[}(t)$$

approche $f(t) = W_t$ dans $\mathbf{M}_T^2$.
En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^T W_s\, dW_s.$$

d. Calculer la limite dans $\mathbf{L}^2$ de la somme

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(W_{t_j^n} + W_{t_{j+1}^n})}{2}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})$$

(intégrale de Stratonovitch).

Solution

a. Par un calcul direct, en remarquant que $T = \sum_{j=0}^{N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)$:

$$\text{(18)} \qquad \Big(\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - T\Big)^2 = \Big(\sum_{j=0}^{N-1}\Big\{(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big\}\Big)^2$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}\Big\{(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big\}^2 + 2\sum_{j<k}\Big\{(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big\}\Big\{(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\Big\}.$$

Posons $\Delta_j = (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)$, on a :

$$\text{(19)} \qquad \Big(\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - T\Big)^2 = \sum_{j=0}^{N-1}\Delta_j^2 + 2\sum_{j<k}\Delta_j\Delta_k.$$

Les accroissements du brownien étant indépendants, centrés et de variance l'accroissement temporel correspondant, on a

$$\text{(20)} \qquad \mathbf{E}(\Delta_j\Delta_k) = \mathbf{E}(\Delta_j)\mathbf{E}(\Delta_k) = 0.$$

Par ailleurs

$$\mathbf{E}(\Delta_j^2) = \mathbf{E}\big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^4\big) - 2(t_{j+1}^n - t_j^n)\mathbf{E}\big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2\big) + (t_{j+1}^n - t_j^n)^2 \tag{21}$$

et puisque les accroissements sont gaussiens, le moment d'ordre 4 vaut $3(t_{j+1}^n - t_j^n)^2$ et l'on a

$$\mathbf{E}(\Delta_j^2) = 2(t_{j+1}^n - t_j^n)^2. \tag{22}$$

Finalement

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - T\Big)^2 = 2\sum_{j=0}^{N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)^2 \leq 2\delta_n \sum_{j=0}^{N-1}(t_{j+1}^n - t_j^n) = 2\delta_n T \to 0. \tag{23}$$

b. On a

$$T_n - S_n = \sum_{j=0}^{N-1}(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 \to T \tag{24}$$

d'après le **a** (convergence dans $\mathbf{L}^2$) et

$$S_n + T_n = \sum_{j=0}^{N-1}(W^2_{t_{j+1}^n} - W^2_{t_j^n}) = W_T^2. \tag{25}$$

Ainsi $J - I = T$ et $J + I = W_T^2$ donc

$$J = \frac{1}{2}W_T^2 + \frac{1}{2}T \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T. \tag{26}$$

c. Soit t fixé dans l'intervalle $[0, T]$, il existe un indice j tel que $t \in [t_j, t_{j+1}[$. Alors

$$\mathbf{E}\big((f_n(t) - W_t)^2\big) = \mathbf{E}\big((W_{t_j^n} - W_t)^2\big) = t - t_j^n \leq \delta_n \to 0. \tag{27}$$

D'après la question **b**

$$S_n = \int_0^T f_n(s)\,dW_s \to I \qquad \text{donc} \qquad I = \int_0^T W_s\,dW_s = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T. \tag{28}$$

d. D'après **b** la limite cherchée est égale à

$$\frac{1}{2}(I + J) = \frac{1}{2}W_T^2. \tag{29}$$

6.— Montrer à l'aide de la formule d'Itô que pour tout $t > 0$ on a

$$\int_0^t s\, dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\, ds.$$

Solution

En posant $f(t, x) = tx$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) = W_t$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) = t$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) = 0$. On applique la formule d'Itô et on obtient immédiatement

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = tW_t = \int_0^t W_s\, ds + \int_0^t s\, dW_s. \tag{30}$$

7.— Montrer l'égalité

$$\int_0^t W_s^2\, dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s\, ds.$$

Solution

C'est à nouveau une application directe de la formule d'Itô avec $f(t, x) = x^3$ (par exemple). On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) = 3W_t^2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) = 6W_t$, d'où

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = W_t^3 = \int_0^t \frac{1}{2} 6W_s\, ds + \int_0^t 3W_s^2\, dW_s \quad \textit{etc.} \tag{31}$$

8.— Calculer l'espérance de W_t^6 en utilisant la formule d'Itô et le fait qu'une intégrale stochastique est une martingale pour la filtration associée à W.

Solution

On choisit d'appliquer la formule d'Itô avec la fonction $f(t, x) = x^6$:

$$W_t^6 = \int_0^t \frac{1}{2} 30W_s^4\, ds + \int_0^t 6W_s^5\, dW_s \tag{32}$$

et on passe aux espérances

$$\mathbf{E}(W_t^6) = 15 \int_0^t \mathbf{E}(W_s^4)\, ds + \mathbf{E}\Big(\int_0^t 6W_s^5\, dW_s\Big) \tag{33}$$

Dans le second membre de cette égalité, l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle (résulte de la propriété de martingale) et l'espérance sous le signe de la première intégrale est égale à $3s^2$. On obtient finalement

$$\mathbf{E}(W_t^6) = 15 \int_0^t 3s^2\, ds = 15t^3. \tag{34}$$

9.— Calculer la variance de $\int_0^t |W_s|^{1/2}\, dW_s$ en utilisant l'isométrie d'Itô.

Solution

Comme intégrale stochastique, l'intégrale stochastique est d'espérance nulle. La variance est donc

$$\mathbf{Var}\Big(\int_0^t |W_s|^{1/2}\, dW_s\Big) = \mathbf{E}\Big(\big(\int_0^t |W_s|^{1/2}\, dW_s\big)^2\Big) = \int_0^t \mathbf{E}(|W_s|)\, ds \tag{35}$$

par l'isométrie d'Itô. On calcule l'espérance

$$\mathbf{E}(|W_s|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbf{R}} |z| e^{-z^2/2s}\, ds = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^\infty z e^{-z^2/2s}\, ds = \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \big[-s e^{-z^2/2s}\big]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{s} \tag{36}$$

et par conséquent

$$\mathbf{Var}\Big(\int_0^t |W_s|^{1/2}\, dW_s\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sqrt{s}\, ds = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t^{3/2} \tag{37}$$

10.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}2 \times S_t\, dt + 0{,}4 \times S_t\, dW_t$$

avec $S_0 = 100$ € et où les coefficients 0,2 et $0,4$ représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S.
Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 160 € au bout d'un an.

Solution

Rappelons comment on obtient la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t\ ,\ \ S_0 > 0 \text{ donné.} \tag{38}$$

On détermine d'abord à l'aide de la formule d'Itô l'EDS que vérifie $X = \log S$. Pour cela on considère la fonction $f(t,s) = \log s$: on a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial s} = 1/s \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = -1/s^2 \tag{39}$$

donc

$$dX_t = \Big(0 + \mu S_t \frac{1}{S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \Big(-\frac{1}{S_t^2}\Big)\Big) dt + \sigma S_t \frac{1}{S_t} dW_t = \big(\mu - \sigma^2/2\big) dt + \sigma dW_t. \tag{40}$$

Ainsi $X = \log S$ est un brownien (affine)

$$X_t = \log S_0 + \big(\mu - \sigma^2/2\big) t + \sigma W_t \tag{41}$$

et la variable X_t suit la loi normale $\mathcal{N}\big(\log S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t\ ;\ \sigma^2 t\big)$ (la variable $S_t = e^{X_t}$ est *log-normale*).

On peut maintenant répondre à la question. On se place à $t = 1$ année.
La variable $Z = \big(X_1 - \log 100 - (0{,}2 - 0{,}08)\big)/0{,}4$ est normale centrée réduite. On a alors

$$\mathbf{P}(S_1 \geq 160) = \mathbf{P}(X_1 \geq \log 160) = \mathbf{P}\Big(Z \geq \frac{\log 1{,}6 - (0{,}2 - 0{,}08)}{0{,}4}\Big) = \mathbf{P}(Z \geq 0{,}8750). \tag{42}$$

À l'aide d'une table de loi normale (et d'une interpolation linéaire) on trouve finalement

$$\mathbf{P}(S_1 \geq 160) = 1 - 0{,}8092 \approx 0{,}191. \tag{43}$$

11.— Soit une action dont le prix S possède une dynamique de brownien géométrique. Le prix spot est $S_0 = 50$ €, le rendement espéré annuel μ est de 16% et la volatilité de ce rendement σ de 30%. En utilisant la distribution de la variable aléatoire $Y_T = \ln S_T$, donner un intervalle de confiance à 90% pour S_T lorsque $T = 2$ ans.

Solution

Cet exercice est analogue à l'exercice précédent, on en reprend les notations. On a $\mu = 0{,}16$, $\sigma = 0{,}30$, $S_0 = 50$ et on se place à $t = 2$.
Il faut comprendre l'intervalle de confiance comme l'intervalle qui laisse 5% de valeurs extrêmes de part et d'autre de la distribution de S.
On cherche donc a et b réels positifs tels que

$$\mathbf{P}(X_2 < \log a) = \mathbf{P}(S_2 < a) = 0{,}05 \text{ et } \mathbf{P}(X_2 > \log b) = \mathbf{P}(S_2 > b) = 0{,}05. \tag{44}$$

La variable $X_2 = \log S_2$ est normale, son espérance est $\log 50 + 2(0{,}16 - 0{,}09/2) = 4{,}1420$ et son écart-type $0{,}30\sqrt{2} = 0{,}4243$.
Par ailleurs, la table de la loi normale standard nous donne, pour une variable Z normale centrée réduite, les valeurs $\alpha = -1{,}645$ et $\beta = 1{,}645$ vérifiant $\mathbf{P}(Z < \alpha) = \mathbf{P}(Z > \beta) = 0{,}05$. On en déduit

$$\log a = 0{,}4243 \times (-1{,}645) + 4{,}1420 = 3{,}44 \quad \text{et} \quad \log b = 0{,}4243 \times 1{,}645 + 4{,}1420 = 4{,}84. \tag{45}$$

On en déduit l'intervalle cherché pour S_2

$$[a, b] = [31{,}31\ ,\ 126{,}47]. \tag{46}$$

D'après la formule (15) (*voir* exercice 4), l'espérance de S_2 est

$$\mathbf{E}(S_2) = \exp(4{,}142 + 0{,}5(0{,}30\sqrt{2})^2) = 68{,}86. \tag{47}$$

12.— On désigne par S_t la valeur à la date t d'un dollar en euros (le cours du dollar), avec $S_0 > 0$. On suppose que la dynamique de ce cours est celle d'un brownien géométrique de rendement annuel μ et de volatilité σ.
a. Déterminer l'EDS satisfaite par le cours $Z = 1/S$ de l'euro en dollars.
b. Déduire de l'équation satisfaite par $U = \log S$ celle satisfaite par $V = \log Z$.
c. Retrouver l'équation satisfaite par Z en calculant la différentielle d'Itô de e^V.

Solution

a. On a

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \tag{48}$$

et, en choisissant le changement de variable $Z = f(t, S)$ avec $f(t, s) = 1/s$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial s} = -1/s^2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 2/s^3. \tag{49}$$

La formule d'Itô donne alors

$$dZ_t = \Big(\mu S_t(-1/S_t^2) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2(2/S_t^3)\Big)\,dt + \sigma S_t(-1/S_t^2)\,dW_t = -\big(\mu - \sigma^2\big)Z_t\,dt - \sigma Z_t\,dW_t \tag{50}$$

qui est aussi la dynamique d'un brownien géométrique.

b. On sait que $U = \log S$ est solution de l'EDS

$$dU_t = \big(\mu - \sigma^2/2\big)dt + \sigma dW_t. \tag{51}$$

Par conséquent $V = -U$ vérifie

$$dV_t = -\big(\mu - \sigma^2/2\big)dt - \sigma dW_t. \tag{52}$$

c. En posant $Z = g(t, V)$ avec $g(t, v) = e^v$ on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0\ ,\ \frac{\partial g}{\partial v} = e^v = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \tag{53}$$

d'où l'EDS vérifiée par Z :

$$dZ_t = \Big(-\big(\mu - \sigma^2/2\big)e^{V_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{V_t}\Big)\,dt - \sigma e^{V_t}\,dW_t = -\big(\mu - \sigma^2\big)Z_t\,dt - \sigma Z_t\,dW_t \tag{54}$$

où l'on retrouve bien l'EDS de la formule (31).