

CORRIGÉ

Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

1.— Un stellage (*straddle*) est une option européenne construite sur un sous-jacent S synthétisée par l'achat simultané d'un call et d'un put sur S de même maturité et de même prix d'exercice K .

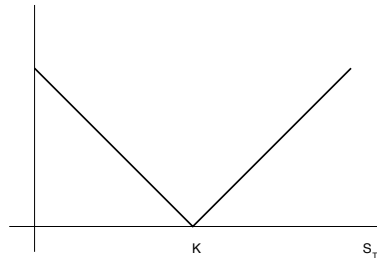
a. Déterminer le pay-off de cette option et tracer son graphe. Donner sa prime à $t = 0$ en fonction des paramètres habituels des formules de Black-Scholes (σ , K , S_0 , r , T , d_1 et d_2) et de la répartition N de la loi normale standard. Donner en particulier la formule pour $K = S_0$.

b. On suppose $S_0 = 30$ € = K , $T = 3$ mois, $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$ (taux annuels). Déterminer la prime de ce stellage.

c. Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce stellage. Quelle est la stratégie d'une telle option ?

Solution

a. Le pay-off du stellage est dessiné ci-dessous :



Son prix est la somme des prix call et put qui le synthétisent. Les formules de Black-Scholes donnent

$$stell_t = (2N(d_1) - 1)S_t - e^{-r(T-t)}(2N(d_2) - 1)K.$$

Lorsque $t = 0$ et $K = S_0$ (option à la monnaie) on a

$$stell_0 = \{(2N(d_1) - 1) - e^{-rT}(2N(d_2) - 1)\}S_0$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma}(r + \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T}.$$

b. Dans ce cas $d_1 = 0,1583$ et $d_2 = 0,0083$. Par conséquent $N(d_1) = 0,5629$ et $N(d_2) = 0,5033$ et

$$stell_0 = 3,5785 \text{ €}.$$

c. Les gains sont illimités dans les deux directions (hausse ou baisse), les pertes ne peuvent dépasser la prime. Si le marché monte ou baisse nettement, le stellage réalisera des profits croissants tant que le marché ira dans la même direction.

2.— Un call européen (sur un actif dont le prix S est supposé suivre le modèle du brownien géométrique) est évalué sur le marché à 2,5 €. Le prix initial du sous-jacent est $S_0 = 15$ €, le prix strike est $K = 13$ €, la date de maturité est à trois mois (*i.e.* $T = 0,25$ année) et le taux d'intérêt sans risque est $r = 5\%$ par an. En utilisant les formules de Black-Scholes, montrer que la volatilité *implicite* est comprise entre 0,35 et 0,40.

Solution

Pour $\sigma = 0,35$, volatilité annuelle, on trouve $d_1 = 0,9766$ et $d_2 = 0,8016$, ce qui donne $N(d_1) = 0,8357$ et $N(d_2) = 0,7881$. On calcule alors le prix du call pour la volatilité la plus basse : $c^- = 2,4162$ €.

Pour une volatilité $\sigma = 0,40$, on trouve : $d_1 = 0,8780$, $d_2 = 0,6780$, $N(d_1) = 0,8100$ et $N(d_2) = 0,7511$. Le calcul du call donne alors $c^+ = 2,50786$ €.

Sur le marché, le call est évalué à 2,5 €. Comme le prix du call est une fonction strictement croissante de la volatilité du sous-jacent — le vega $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$ d'un call est égal à $S_t \sqrt{T-t} N'(d_1) > 0$ (même vega pour le put) — la volatilité implicite est comprise entre les deux valeurs 0,35 et 0,40.

3.— On reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes.

a. Montrer l'égalité

$$S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2).$$

b. En déduire que la valeur du delta d'un call européen peut s'écrire

$$\Delta_{call} = N(d_1).$$

Donner une formule analogue pour le delta d'un put, puis montrer que $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

c. Le *gamma* d'une option $f = f(t, s)$ est la dérivée seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$. Calculer le gamma d'un call et d'un put européens.

Montrer que les prix de ces options sont des fonctions convexes du sous-jacent.

Solution

a. La dérivée de N est la densité de la loi normale standard $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$. On doit donc montrer l'égalité

$$\frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) = \frac{K e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_2^2}{2}).$$

En écrivant $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2)$ on trouve

$$d_1^2 - d_2^2 = 2(\log \frac{S_t}{K} + r(T-t))$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} S_t N'(d_1) &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_1^2}{2}) \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_2^2}{2}) \exp(-\log \frac{S_t}{K} - r(T-t)) \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{d_2^2}{2}) \frac{K}{S_t} \exp(-r(T-t)) \\ &= K \exp(-r(T-t)) N'(d_2). \end{aligned}$$

b. En dérivant la formule du call $c(t, s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$, on trouve, avec $s = S_t$:

$$\Delta_{call} = \frac{\partial c}{\partial s} = N(d_1) + sN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial s} - e^{-r(T-t)}KN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial s} = N(d_1)$$

puisque les dérivées en s de d_1 et d_2 sont identiques.

La formule pour le put est

$$\Delta_{put} = N(d_1) - 1$$

dont on tire immédiatement la relation demandée $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

c. En utilisant les résultats précédents, on trouve les gammas des calls et des puts en dérivant les deltas :

$$\Gamma_{call} = \Gamma_{put} = \frac{N'(d_1)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

Ces quantités sont positives, d'où la convexité des prix de calls et de puts par rapport au sous-jacent.

4.— Avec les notations habituelles, montrer que $S_tN(d_1) > c_t$ où c désigne un call européen construit sur S . En déduire que

$$\frac{\Delta c}{c} > \frac{\Delta S}{S}$$

si $\Delta S > 0$, où ΔS désigne un accroissement de S et Δc l'accroissement correspondant du call (effet de levier).

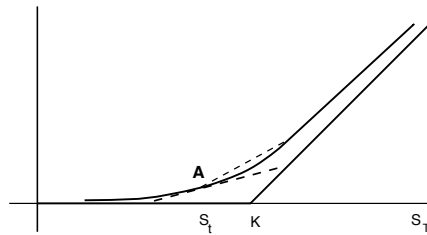
Solution

On utilise les résultats de l'exercice précédent.

D'après les formules de Black-Scholes on a

$$S_tN(d_1) = c_t + e^{-r(T-t)}KN(d_2) > c_t.$$

où $c_t = c(t, s)$ est le prix du call lorsque $S_t = s$. Ainsi $c_t/S_t < N(d_1) = \frac{\partial c}{\partial s}$. Comme le call est une fonction convexe du sous-jacent, on a $\frac{\Delta c}{\Delta s} \geq \frac{\partial c}{\partial s}$ pour $\Delta s > 0$:



Au point A, la pente de la tangente est inférieure à celle de la corde