Épreuve du jeudi 27 avril 2010

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende. Les options sont européennes. On reprend les notations habituelles ; en particulier $(W_t)_{t\geq 0}$ représente un brownien standard.

1.— Soit le processus défini par $X_t = W_t^3 - 3tW_t$.

a. Déterminer l'EDS vérifiée par X_t.

b. Le processus X_t est-il une martingale (pour la filtration $(\mathcal{F}_t)$ associée à (W_t)) ? (justifier la réponse)

2.— On considère l'intégrale stochastique

$$Y_t = \int_0^t W_s^2 \, dW_s \quad \text{où } t \geq 0.$$

Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y_t est centrée puis calculer sa variance en utilisant l'isométrie d'Itô (on rappelle que si Z désigne une variable normale centrée réduite, alors l'espérance de Z^4 est égale à 3).

3.— Un actif S se négocie aujourd'hui à 40 €. Un trader achète un call et un put sur S de même strike $K_1 = 40$ € et vend un put de strike 36 € (stratégie *straddle versus put*). Ces options ont même maturité $T = 3$ mois $= 0{,}25$ année.

a. Dessiner le profil (le pay-off) de cette stratégie d'options.

b. Le taux sans risque annuel est $r = 0{,}02$ et la volatilité est $\sigma = 30\%$. Calculer le prix de cette stratégie à la date initiale $t = 0$.
Dessiner ensuite le profil des pertes et profits.

c. Quels sont les pertes et les profits maximaux possibles ? Préciser les points-morts.

d. Un mois plus tard, l'actif vaut à nouveau 40 € mais la volatilité implicite σ a monté : elle vaut maintenant 40%. Le trader décide de liquider sa position : déterminer le prix de vente de sa stratégie à cette nouvelle date (deux mois avant l'échéance, soit 1/6 d'année).
Quel est le rendement de la stratégie sur le mois où le trader a maintenu sa position ?

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 3 – 3 –14

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividende et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$