

Dans tout ce qui suit, le sous-jacent S est supposé sans dividende.

1.— a. On considère un modèle de marché (B, S) à une étape. On suppose que $S_0 = 50$ € et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,04$ et $d = 0,96$. Autrement dit, à la date $t = 1$ on a $(S_1^u = 52, S_1^d = 48)$. Pour simplifier, on prendra $r = 0$ comme rendement non-risqué.

Un trader achète un call de prix d'exercice $K = 51$ € et le couvre immédiatement en vendant un portefeuille de réplcation de ce call. Déterminer le prix du call et préciser les opérations effectuées par le trader. En quoi la vente du portefeuille de réplcation couvre-t-elle le call ?

b. En réalité, sur la période considérée et à l'insu du marché, la volatilité du sous-jacent était supérieure : les facteurs de variation réels étaient $u = 1,08$ et $d = 0,92$.

Cette situation est-elle favorable au trader ? Pour répondre à cette question, on déterminera les flux d'argent à l'échéance du call en tenant compte de la situation imprévue.

Le call était-il sous-évalué ? Le marché présentait-il une opportunité d'arbitrage ?

c. Reprendre la question précédente dans le cas d'une volatilité réelle inférieure, par exemple $u = 1,02$ et $d = 0,98$.

d. Reprendre les questions **a.** et **b.** dans le cas d'un put acheté.

2.— Montrer que le prix d'un call européen C de strike K sur un sous-jacent S (ne versant pas de dividende) vérifie $C_t \geq S_t - K$ à tout instant $t \in [0, T]$.

En déduire qu'il n'est jamais optimal d'exercer un call américain avant l'échéance et que son prix est le même que le call européen correspondant.

Examinez le cas du put ; on distinguera les cas $r = 0$ et $r > 0$.

3.— Un trader vend un put européen d'échéance $T = 1$ an et utilise un modèle C-R-R à deux étapes pour évaluer ce put. Le prix au comptant est $S_0 = 50$ €, les facteurs de hausse et de baisse pour chaque période sont $u = 1,2$ et $d = 0,96$, le taux annuel de l'actif sans risque est $r = 0,05$. Le prix d'exercice du put est $K = 60$ €.

a. Déterminer le prix du put à $t = 0$ et préciser les opérations de couverture dynamique (delta-neutre) effectuées par le trader pour chaque trajectoire possible du sous-jacent.

b. Déterminer le prix d'un put américain de même échéance et même strike. À quel date est-il optimal d'exercer le put ?