Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Soient s et t deux réels positifs. Montrer que la covariance de W_s et W_t est le plus petit des deux nombres s et t.

2.— Vérifier que la variance de W_s^2 est égale à $2s^2$.

3.— On considère le processus Z défini par $Z_t = \sqrt{t}Y$, où Y suit une loi normale standard. Déterminer les lois marginales de Z. Le processus Z est-il un processus de Wiener ?

4.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}2 \times S_t \, dt + 0{,}4 \times S_t \, dW_t$$

avec $S_0 = 100$ € et où les coefficients 0,2 et 0, 4 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S.

Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 160 € au bout d'un an.

5.— Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X > 0$ dont le logarithme suit une loi normale de paramètres μ et σ^2.

6.— Soit une action dont le prix S possède une dynamique de brownien géométrique. Le prix spot est $S_0 = 50$ €, le rendement espéré annuel μ est de 16% et la volatilité de ce rendement σ de 30%. En utilisant la distribution de la variable aléatoire $Y_T = \ln S_T$, donner un intervalle de confiance à 90% pour S_T lorsque $T = 2$ ans.

7.— On désigne par S_t la valeur à la date t d'un dollar en euros (le cours du dollar), avec $S_0 > 0$. On suppose que la dynamique de ce cours est celle d'un brownien géométrique de rendement annuel μ et de volatilité σ.

a. Déterminer l'EDS satisfaite par le cours $Z = 1/S$ de l'euro en dollars.

b. Déduire de l'équation satisfaite par $U = \log S$ celle satisfaite par $V = \log Z$.

c. Retrouver l'équation satisfaite par Z en calculant la différentielle d'Itô de e^V.
