

CORRIGÉ

Dans ces exercices, W désignera toujours un processus de Wiener (brownien standard)

1.— Soient s et t deux réels positifs. Montrer que la covariance de W_s et W_t est le plus petit des deux nombres s et t .

Solution

On suppose $s < t$ et on écrit $W_t = W_t - W_s + W_s$. On a alors :

$$(1) \quad \mathbf{cov}(W_s, W_t) = \mathbf{E}(W_s W_t) = \mathbf{E}(W_s(W_t - W_s)) + \mathbf{E}(W_s^2)$$

puisque toutes les variables concernées sont centrées. Les accroissements $W_t - W_s$ et $W_s - W_0 = W_s$ sont indépendants donc l'espérance du produit est le produit des espérances. Ces dernières sont nulles, à nouveau en raison du caractère centré des variables. La variance de W_s étant égale à s , on trouve finalement

$$(2) \quad \mathbf{cov}(W_s, W_t) = s = s \wedge t.$$

2.— Vérifier que la variance de W_s^2 est égale à $2s^2$.

Solution

On a

$$(3) \quad \mathbf{var}(W_s^2) = \mathbf{E}(W_s^4) - \mathbf{E}(W_s^2)^2 = \mathbf{E}(W_s^4) - s^2$$

puisque $\mathbf{E}(W_s^2) = \mathbf{var}(W_s) = s$. Il reste à calculer $\mathbf{E}(W_s^4)$.

Pour une variable aléatoire quelconque X à densité f_X on a

$$(4) \quad \mathbf{E}(h(X)) = \int_{\mathbf{R}} h(x) f_X(x) dx.$$

pour h fonction mesurable. Ainsi, avec $h(x) = x^4$ et $X = W_s$

$$(5) \quad \mathbf{E}(W_s^4) = \int_{\mathbf{R}} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/2s} dx.$$

Par une intégration par parties

$$(6) \quad \mathbf{E}(W_s^4) = \left[-sx^3 e^{-x^2/2s} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 3s \int_{\mathbf{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/2s} dx.$$

L'intégrale du second membre est égale à s , la variance de W_s . Le terme tout intégré est nul (croissance comparée à l'infini de l'exponentielle et d'un polynôme). On trouve donc

$$(7) \quad \mathbf{E}(W_s^4) = 3s^2$$

et par conséquent

$$(8) \quad \mathbf{var}(W_s^2) = 3s^2 - s^2 = 2s^2.$$

3.— On considère le processus Z défini par $Z_t = \sqrt{t}Y$, où Y suit une loi normale standard. Déterminer les lois marginales de Z . Le processus Z est-il un processus de Wiener ?

Solution

Comme Y est $\mathcal{N}(0; 1)$ (normale d'espérance 0 et de variance 1) la variable Z_t est normale centrée de variance $(\sqrt{t})^2 = t$. Le processus Z a donc les mêmes marginales qu'un processus de Wiener.

Cependant Z n'est pas un processus de Wiener, comme on peut le voir en calculant les covariances

$$(9) \quad \mathbf{cov}(Z_s, Z_t) = \mathbf{cov}(\sqrt{s}Y, \sqrt{t}Y) = \sqrt{st} \neq s \wedge t.$$

On aurait aussi pu remarquer que le processus Z n'est ni stationnaire ni à accroissements indépendants.

4.— Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X > 0$ dont le logarithme suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 .

Solution

La densité de $Y = \log X$ est

$$(10) \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

En utilisant l'égalité (4) on a donc

$$(11) \quad \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(e^Y) = \int_{\mathbf{R}} e^y \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + y\right) dy.$$

On écrit ensuite

$$(12) \quad -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + y = -\frac{1}{2\sigma^2} \left((y - (\mu + \sigma^2))^2 - (\mu + \sigma^2)^2 + \mu^2 \right)$$

soit

$$(13) \quad -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + y = -\frac{1}{2\sigma^2} \left((y - (\mu + \sigma^2))^2 - 2\sigma^2(\mu + \sigma^2/2) \right) = -\frac{1}{2\sigma^2} (y - (\mu + \sigma^2))^2 + \mu + \sigma^2/2.$$

Par conséquent

$$(14) \quad \mathbf{E}(X) = e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - (\mu + \sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dy.$$

L'intégrand est une densité : son intégrale vaut 1, donc

$$(15) \quad \mathbf{E}(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}.$$

On calcule maintenant la variance. On a $\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ et il reste à calculer le terme $\mathbf{E}(X^2)$. On a

$$(16) \quad \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(e^{2Y}) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + 2y\right) dy.$$

On écrit, de façon analogue aux équations (12) et (13),

$$(17) \quad -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} + 2y = -\frac{1}{2\sigma^2} (y - (\mu + 2\sigma^2))^2 + 2(\mu + \sigma^2).$$

On en déduit, comme en (14) et (15),

$$(18) \quad \mathbf{E}(X^2) = e^{2(\mu+\sigma^2)} \quad \text{et par conséquent} \quad \mathbf{var}(X) = e^{2(\mu+\sigma^2/2)}(e^{\sigma^2} - 1).$$

5.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0,2 \times S_t dt + 0,4 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 100 \text{ €}$ et où les coefficients 0,2 et 0,4 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S .

Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 160 € au bout d'un an.

Solution

Rappelons comment on obtient la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$(19) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0 \text{ donné.}$$

On détermine d'abord à l'aide de la formule d'Itô l'EDS que vérifie $X = \log S$. Pour cela on considère la fonction $f(t, s) = \log s$: on a

$$(20) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = 1/s \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = -1/s^2$$

donc

$$(21) \quad dX_t = \left(0 + \mu S_t \frac{1}{S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\right) dt + \sigma S_t \frac{1}{S_t} dW_t = (\mu - \sigma^2/2) dt + \sigma dW_t.$$

Ainsi $X = \log S$ est un brownien (généralisé)

$$(22) \quad X_t = \log S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$$

et la variable X_t suit la loi normale $\mathcal{N}(\log S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t; \sigma^2 t)$ (la variable $S_t = e^{X_t}$ est *log-normale*).

On peut maintenant répondre à la question. On se place à $t = 1$ année.

La variable $Z = (X_1 - \log 100 - (0,2 - 0,08))/0,4$ est normale centrée réduite. On a alors

$$(23) \quad \mathbf{P}(S_1 \geq 160) = \mathbf{P}(X_1 \geq \log 160) = \mathbf{P}\left(Z \geq \frac{\log 1,6 - (0,2 - 0,08)}{0,4}\right) = \mathbf{P}(Z \geq 0,8750).$$

À l'aide d'une table de loi normale (et d'une interpolation linéaire) on trouve finalement

$$(24) \quad \mathbf{P}(S_1 \geq 160) = 1 - 0,8092 \approx 0,191.$$

6.— Soit une action dont le prix S possède une dynamique de brownien géométrique. Le prix spot est $S_0 = 50$ €, le rendement espéré annuel μ est de 16% et la volatilité de ce rendement σ de 30%. En utilisant la distribution de la variable aléatoire $Y_T = \ln S_T$, donner un intervalle de confiance à 90% pour S_T lorsque $T = 2$ ans.

Solution

Cet exercice est analogue à l'exercice précédent, on en reprend les notations. On a $\mu = 0,16$, $\sigma = 0,30$, $S_0 = 50$ et on se place à $t = 2$.

Il faut comprendre l'intervalle de confiance comme l'intervalle qui laisse 5% de valeurs extrêmes de part et d'autre de la distribution de S .

On cherche donc a et b réels positifs tels que

$$(25) \quad \mathbf{P}(X_2 < \log a) = \mathbf{P}(S_2 < a) = 0,05 \text{ et } \mathbf{P}(X_2 > \log b) = \mathbf{P}(S_2 > b) = 0,05.$$

La variable $X_2 = \log S_2$ est normale, son espérance est $\log 50 + 2(0,16 - 0,09/2) = 4,1420$ et son écart-type $0,30\sqrt{2} = 0,4243$.

Par ailleurs, la table de la loi normale standard nous donne, pour une variable Z normale centrée réduite, les valeurs $\alpha = -1,645$ et $\beta = 1,645$ vérifiant $\mathbf{P}(Z < \alpha) = \mathbf{P}(Z > \beta) = 0,05$. On en déduit

$$(26) \quad \log a = 0,4243 \times (-1,645) + 4,1420 = 3,44 \quad \text{et} \quad \log b = 0,4243 \times 1,645 + 4,1420 = 4,84.$$

On en déduit l'intervalle cherché pour S_2

$$(27) \quad [a, b] = [31,31, 126,47].$$

D'après la formule (15) (voir exercice 4), l'espérance de S_2 est

$$(28) \quad \mathbf{E}(S_2) = \exp(4,142 + 0,5(0,30\sqrt{2})^2) = 68,86.$$

7.— On désigne par S_t la valeur à la date t d'un dollar en euros (le cours du dollar), avec $S_0 > 0$. On suppose que la dynamique de ce cours est celle d'un brownien géométrique de rendement annuel μ et de volatilité σ .

- a. Déterminer l'EDS satisfaite par le cours $Z = 1/S$ de l'euro en dollars.
- b. Dédurre de l'équation satisfaite par $U = \log S$ celle satisfaite par $V = \log Z$.
- c. Retrouver l'équation satisfaite par Z en calculant la différentielle d'Itô de e^V .

Solution

a. On a

$$(29) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

et, en choisissant le changement de variable $Z = f(S)$ avec $f(s) = 1/s$, on a

$$(30) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = -1/s^2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 2/s^3.$$

La formule d'Itô donne alors

$$(31) \quad dZ_t = \left(\mu S_t (-1/S_t^2) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 (2/S_t^3) \right) dt + \sigma S_t (-1/S_t^2) dW_t = -(\mu - \sigma^2) Z_t dt - \sigma Z_t dW_t$$

qui est aussi la dynamique d'un brownien géométrique.

b. On sait que $U = \log S$ vérifie

$$(32) \quad dU_t = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t.$$

Par conséquent $V = -U$ vérifie

$$(33) \quad dV_t = -(\mu - \sigma^2/2)dt - \sigma dW_t.$$

c. En posant $Z = g(V)$ avec $g(v) = e^v$ on trouve

$$(34) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = e^v = \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

d'où l'EDS vérifiée par Z :

$$(35) \quad dZ_t = \left(-(\mu - \sigma^2/2)e^{V_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{V_t} \right) dt - \sigma e^{V_t} dW_t = -(\mu - \sigma^2)Z_t dt - \sigma Z_t dW_t$$

où l'on retrouve bien l'EDS de la formule (31).
