

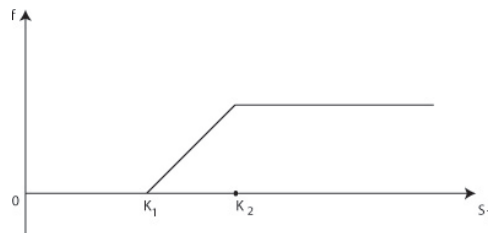
Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

- 1.— Déterminer l'EDS vérifiée par $X = W^n$, $n \geq 1$, W processus de Wiener.
- 2.— Soit λ un réel. Vérifier que les fonctions $f(t, x) = \lambda x$ et $g(t, x) = \lambda e^{rt}$ sont chacune solution de l'équation de Black-Scholes.
Déterminer les dérivés qu'elles représentent ainsi que les portefeuilles de couverture correspondants.
- 3.— On appelle *call digital* (ou *binnaire*) de strike K et d'échéance T sur un sous-jacent S donné une option européenne dont le pay-off à l'échéance est

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < K, \\ 1 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Déterminer le prix et la couverture à la date $t = 0$ du call digital.

- 4.— On considère une option européenne dont le pay-off est dessiné ci-dessous (*spread vertical haussier*), synthétisée par une position longue sur un call de strike K_1 et une position courte sur un call de strike $K_2 > K_1$, les deux calls portant sur un même sous-jacent S et ayant même maturité T .



La maturité est $T = 6$ mois. On suppose en outre qu'à la date $t = 0$ la valeur de l'actif risqué est $s_0 = 50$ € et que sa volatilité annuelle est estimée à $\sigma = 20\%$. Le rendement annuel de l'actif non-risqué sur la période $[0, T]$ est $r = 5\%$. Enfin, les prix d'exercice K_1 et K_2 sont respectivement 50 € et 60 €.

- a. Déterminer le prix à la date $t = 0$ de cette option.
- b. Un trader a vendu ce spread et le couvre : préciser ses opérations de couverture et son portefeuille à la date $t = 0$; on admettra que le delta d'un call est égal à $N(d_1)$.

5.— Le tableau suivant, censé montrer les prix de calls européens à différentes maturités et pour différents prix d'exercice, tous placés sur un même actif de prix initial 50 €, n'est pas en accord avec les hypothèses de marché Black-Scholes-Merton :

Prix Strike	Maturité (mois)		
	3	6	12
45	1,6	2,9	5,1
50	3,7	5,2	7,5
55	7,0	8,3	10,5

En justifiant *brièvement* et *sans aucun calcul* votre réponse, dites pourquoi ce tableau est incorrect.