

Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

1.— Déterminer l'EDS vérifiée par  $X = W^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $W$  processus de Wiener. En déduire l'égalité

$$\mathbf{E}(W_t^n) = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t \mathbf{E}(W_s^{n-2}) ds.$$

2.— Soit  $\lambda$  un réel. Vérifier que les fonctions  $f(t, x) = \lambda x$  et  $g(t, x) = \lambda e^{rt}$  sont chacune solution de l'équation de Black-Scholes.

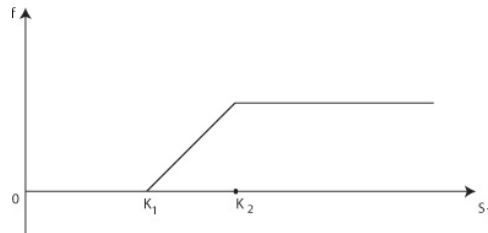
Déterminer les dérivés qu'elles représentent ainsi que les portefeuilles de couverture correspondants.

3.— On appelle *call digital* (ou *binnaire*) de strike  $K$  et d'échéance  $T$  sur un sous-jacent  $S$  donné une option européenne dont le pay-off à l'échéance est

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < K, \\ 1 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Déterminer le prix et la couverture à la date  $t = 0$  du call digital.

4.— On considère une option européenne dont le pay-off est dessiné ci-dessous (*spread vertical* haussier), synthétisée par une position longue sur un call de strike  $K_1$  et une position courte sur un call de strike  $K_2 > K_1$ , les deux calls portant sur un même sous-jacent  $S$  et ayant même maturité  $T$ .



La maturité est  $T = 6$  mois. On suppose en outre qu'à la date  $t = 0$  la valeur de l'actif risqué est  $s_0 = 50\text{€}$  et que sa volatilité annuelle est estimée à  $\sigma = 20\%$ . Le rendement annuel de l'actif non-risqué sur la période  $[0, T]$  est  $r = 5\%$ . Enfin, les prix d'exercice  $K_1$  et  $K_2$  sont respectivement  $50\text{€}$  et  $60\text{€}$ .

a. Déterminer le prix à la date  $t = 0$  de cette option.

b. Un trader a vendu ce spread et le couvre : préciser ses opérations de couverture et son portefeuille à la date  $t = 0$  ; on admettra que le delta d'un call est égal à  $N(d_1)$ .

5.— Le tableau suivant, censé montrer les prix de calls européens à différentes maturités et pour différents prix d'exercice, tous placés sur un même actif de prix initial  $50\text{€}$ , n'est pas en accord avec les hypothèses de marché Black-Scholes-Merton :

Prix Strike	Maturité (mois)		
	3	6	12
45	1,6	2,9	5,1
50	3,7	5,2	7,5
55	7,0	8,3	10,5

En justifiant *brièvement* et *sans aucun calcul* votre réponse, dites pourquoi ce tableau est incorrect.