Corrigé

Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

1.— Déterminer l'EDS vérifiée par $X = W^n$, $n \geq 1$, W processus de Wiener.

Solution

Pour un processus d'Itô général $dY_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t$ et $X_t = f(t, Y_t)$ la formule d'Itô donne

$$dX_t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, Y_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, Y_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, Y_t) \right\} dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, Y_t)\, dW_t$$

Avec la fonction $f(t, x) = x^n$, dont les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

et avec $Y = W$ c'est-à-dire $\mu_t = 0$, $\sigma_t = 1$, on trouve pour $X = W^n$:

$$dX_t = \frac{n(n-1)}{2} W_t^{n-2}\, dt + nW_t^{n-1}\, dW_t\,.$$

2.— Soit λ un réel. Vérifier que les fonctions $f(t, x) = \lambda x$ et $g(t, x) = \lambda e^{rt}$ sont chacune solution de l'équation de Black-Scholes.
Déterminer les dérivés qu'elles représentent ainsi que les portefeuilles de couverture correspondants.

Solution

Les vérifications sont immédiates. La fonction f représente le prix d'un dérivé qui assure la livraison de λ parts de sous-jacent au prix comptant S_T à l'échéance T ; sa couverture à $t = 0$ est simplement l'achat de λ parts de sous-jacent au prix λS_0 €. La prime demandée sera de λS_0 €.
La fonction g représente le prix d'un dérivé qui paye exactement λe^{rT} € à l'échéance T et sa couverture à $t = 0$ est le placement de la somme λ € ; cette somme est aussi la prime qui sera réclamée par le vendeur.

3.— On appelle *call digital* (ou *binaire*) de strike K et d'échéance T sur un sous-jacent S donné une option européenne dont le pay-off à l'échéance est

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < K, \\ 1 & \text{si } S_T \geq K. \end{cases}$$

Déterminer le prix et la couverture à la date $t = 0$ du call digital.

Solution

On rappelle la formule de calcul de prix d'une option européenne

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E_Q}\big(f_T(S_T) \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{E_Q}$ représente l'espérance pour la probabilité "risque neutre" $\mathbf{Q}$. Sous cette probabilité l'actif S suit la dynamique d'un brownien géométrique

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t.$$

La loi de S_T est log-normale ; on peut trouver plus commode de calculer cette espérance en utilisant la densité de $\log S_T$ conditionnée par S_t qui est celle d'une loi normale d'espérance $\log S_t + (r - \sigma^2/2)(T-t)$ et de variance $\sigma^2(T-t)$. Cette densité est

$$f_{\log S_T|S_t}(x|s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{ -\frac{\left(x - \left(\log s + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right\}.$$

Avec un pay-off donné f_T, on utilisera alors la formule de transfert

$$\mathbf{E}\big(f_T(S_T)|S_t = s\big) = \int_{\mathbf{R}} f_T(e^x) f_{\log S_T|S_t}(x|s)\, dx.$$

Dans le cas présent les calculs sont simplifiés par le fait que $t = 0$: la valeur S_0 est le prix au comptant à cette date et la prime du call binaire s'obtiendra par un calcul d'espérance actualisée (non-conditionnelle). On a

$$c_{bin,0} = e^{-rT} \mathbf{E_Q}\big(c_{bin,T}(S_T)\big)$$

avec $S_T = S_0 \exp\big\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma W_T\big\}$ et $c_{bin,T} = \mathbf{1}_{[K,+\infty[}$. Par conséquent

$$c_{bin,0} = e^{-rT} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{\log K}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(x - \left(\log S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T\right)\right)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx.$$

où l'on intègre à partir de $\log K$ puisque $c_{bin,T}(e^x)$ est nul pour $e^x < K$ et vaut 1 sinon.

En effectuant le changement de variable $z = \dfrac{x - \left(\log S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$ on trouve

$$c_{bin,0} = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} \exp\big(-\frac{z^2}{2}\big)\, dz$$

où $d_2 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(\log(S_0/K) + \big(r - \sigma^2/2)T\big)$, ce qui donne, en notant N la fonction de répartition de la loi normale standard :

$$c_{bin,0} = e^{-rT}(1 - N(-d_2)) = e^{-rT} N(d_2).$$

On calculerait de même qu'à tout instant t intermédiaire la valeur du call binaire est

$$c_{bin,t} = e^{-r(T-t)} N(d_2).$$

avec $d_2 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\big(\log(S_t/K) + \big(r - \sigma^2/2)(T-t)\big)$.

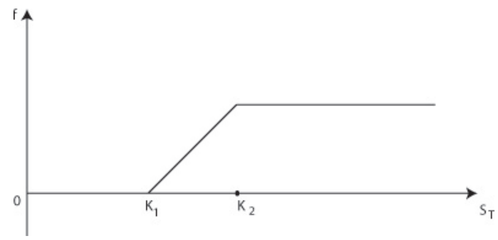
En dérivant par rapport à $s = S_0$ on trouve que le delta du call binaire vaut

$$\Delta_{call\ bin,0} = \frac{e^{-rT} N'(d_2)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

où d_2 est calculé avec $t = 0$. Ce delta correspond à la quantité de sous-jacent S_0 que le vendeur du call binaire devra acheter pour couvrir le risque de hausse. Évidemment, la couverture est censée être ensuite réajustée en temps continu.

Remarque : $N(d_2)$ est la probabilité *risque neutre* pour que l'actif S soit de prix supérieur à K à la date T.

4.— On considère une option européenne dont le pay-off est dessiné ci-dessous (*spread vertical* haussier), synthétisée par une position longue sur un call de strike K_1 et une position courte sur un call de strike $K_2 > K_1$, les deux calls portant sur un même sous-jacent S et ayant même maturité T.



La maturité est $T = 6$ mois. On suppose en outre qu'à la date $t = 0$ la valeur de l'actif risqué est $s_0 = 50$ € et que sa volatilité annuelle est estimée à $\sigma = 20\%$. Le rendement annuel de l'actif non-risqué sur la période $[0, T]$ est $r = 5\%$. Enfin, les prix d'exercice K_1 et K_2 sont respectivement 50 € et 60 €.
a. Déterminer le prix à la date $t = 0$ de cette option.
b. Un trader a vendu ce spread et le couvre : préciser ses opérations de couverture et son portefeuille à la date $t = 0$; on admettra que le delta d'un call européen est égal à $N(d_1)$.

Solution
a. Le prix de cette option est la différence des prix des deux calls $c_1 - c_2$. On calculera donc d'abord le prix de chacun de ces calls en utilisant les formules de Black-Scholes.

- pour c_1 : on trouve, avec $T = 0{,}5$ année et $t = 0$:

$$d_1 = \frac{1}{0{,}2\sqrt{0{,}5}}\left\{\log\frac{50}{50} + (0{,}05 + \tfrac{1}{2}(0{,}2)^2)\times 0{,}5\right\} \approx 0{,}2475 \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}1061.$$

  En utilisant la table de la loi normale on trouve $N(d_1) = 0{,}5977$ et $N(d_2) = 0{,}5422$. Par conséquent

$$c_1 = 50\times 0{,}5977 - e^{-0{,}05\times 0{,}5}\times 50\times 0{,}5422 = 3{,}4444\,€.$$

- pour c_2 : on trouve de même $d_1 \approx -1{,}0417$ et $d_2 \approx -1{,}1831$ puis, en utilisant la relation $N(-u) = 1 - N(u)$, $N(d_1) = 0{,}1488$ et $N(d_2) = 0{,}1184$. Par conséquent

$$c_2 = 50\times 0{,}1488 - e^{-0{,}05\times 0{,}5}\times 60\times 0{,}1184 = 0{,}5114\,€.$$

Le prix du portefeuille est donc

$$c_1 - c_2 = 2{,}9330\,€.$$

b. Pour couvrir la vente d'un call contre un risque de hausse du sous-jacent, le trader achète $N(d_1)$ parts d'actif S. De même, s'il a acheté un call, le trader couvre sa position en se protégeant contre une baisse par la vente à découvert d'une part analogue de sous-jacent.
Dans le cas de ce spread, le trader va donc insérer $0{,}5977 - 0{,}1488 = 0{,}4489$ parts de sous-jacent dans son portefeuille. Autrement dit, il va acheter ces parts d'actif risqué, ce qui va lui coûter $0{,}4489\times 50 = 22,4450$ €. Il devra donc emprunter cette somme sur le marché de la monnaie, diminuée toutefois de la prime de 2,9330 € qu'il a touchée pour la vente du spread.
En définitive, le trader va se constituer à $t = 0$ le portefeuille de couverture suivant :

$$(b, \Delta) = (-19{,}5120\,€\ ,\ 0{,}4489 \text{ part}).$$

5.— Le tableau suivant, censé montrer les prix de calls européens à différentes maturités et pour différents prix d'exercice, tous placés sur un même actif de prix initial 50 €, n'est pas en accord avec les hypothèses de marché Black-Scholes-Merton :

	Maturité (mois)		
Prix Strike	**3**	**6**	**12**
45	1,6	2,9	5,1
50	3,7	5,2	7,5
55	7,0	8,3	10,5

En justifiant *brièvement* et *sans aucun calcul* votre réponse, dites pourquoi ce tableau est incorrect.

Solution

Le tableau montre des prix de calls croissants en fonction du strike, ce qui est incorrect. En effet, si l'on considère deux calls de strike K et K' avec $K < K'$ alors les pay-offs vérifient $c_T(K) > c_T(K')$; en absence d'opportunité d'arbitrage, ceci entraîne $c_0(K) > c_0(K')$.

En revanche, l'évolution des prix de calls en fonction de la maturité est plausible. On peut en effet montrer que la dérivée temporelle (le *theta*) d'un call, $\frac{\partial c}{\partial t}$, est négative. Le prix du call est donc une fonction décroissante du temps, par conséquent une fonction croissante du temps à la maturité $u = T - t$ restant ; il est donc aussi fonction croissante de la maturité T.