Dans ces exercices, on a choisi le modèle de marché Black-Scholes-Merton

1.— Un stellage (*straddle*) est une option européenne construite sur un sous-jacent S synthétisée par l'achat simultané d'un call et d'un put sur S de même maturité et de même prix d'exercice K.

a. Déterminer le pay-off de cette option et tracer son graphe. Donner sa prime à $t = 0$ en fonction des paramètres habituels des formules de Black-Scholes (σ, K, S_0, r, T, d_1 et d_2) et de la répartition N de la loi normale standard. Donner en particulier la formule pour $K = S_0$.

b. On suppose $S_0 = 30$ € $= K$, $T = 3$ mois, $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$ (taux annuels). Déterminer la prime de ce stellage.

c. Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce stellage. Quelle est la stratégie d'une telle option ?

2.— Un call européen (sur un actif dont le prix S est supposé suivre le modèle du brownien géométrique) est évalué sur le marché à 2,5 €. Le prix inital du sous-jacent est $S_0 = 15$ €, le prix strike est $K = 13$ €, la date de maturité est à trois mois (*i.e.* $T = 0{,}25$ année) et le taux d'intérêt sans risque est $r = 5\%$ par an. En utilisant les formules de Black-Scholes, montrer que la volatilité *implicite* est comprise entre 0,35 et 0,40.

3.— On reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes.
a. Montrer l'égalité

$$S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2).$$

b. En déduire que la valeur du delta d'un call européen peut s'écrire

$$\Delta_{call} = N(d_1).$$

Donner une formule analogue pour le delta d'un put, puis montrer que $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$.

c. Le *gamma* d'une option $f = f(t, s)$ est la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t, S_t)$. Calculer le gamma d'un call et d'un put européens.
Montrer que les prix de ces options sont des fonctions convexes du sous-jacent.

4.— Avec les notations habituelles, montrer que $S_t N(d_1) > c_t$ où c désigne un call européen construit sur S. En déduire que

$$\frac{\Delta c}{c} > \frac{\Delta S}{S}$$

si $\Delta S > 0$, où ΔS désigne un accroissement de S et Δc l'accroissement correspondant du call (effet de levier).