

Épreuve du lundi 23 mars 2009

SUJET 1

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à deux étapes. On suppose que $S_0 = 20\text{€}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,08$ et $d = 0,98$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. On considère le call européen sur le sous-jacent S , de prix d'exercice $K = 21\text{€}$ et d'échéance $T = 2$, la fin de la seconde période.

Déterminer le prix du call à la date $t = 0$ ainsi que le portefeuille de réplcation pour l'étape 1.

c. On suppose que le prix du sous-jacent baisse au cours de la première étape. Déterminer le portefeuille de réplcation pour la seconde étape.

d. Un trader a vendu ce call. Le prix du sous-jacent subit une baisse puis une hausse. Décrire les opérations (achat/vente de S , prêt/emprunt d'euros) effectuées par le trader aux dates $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.

2.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 30\text{€}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,03$ et $d = 0,98$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1\%$.

On considère le put *américain* sur le sous-jacent S , de prix d'exercice $K = 29,5\text{€}$ et d'échéance $T = 3$.

a. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

b. Si l'actif subit trois baisses successives, à quelle date est-il optimal d'exercer ce put ?

On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max((K - S_t)_+, B_{\delta t}^{-1} \mathbf{E}_q(p_{t+\delta t} | S_t))$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt .

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 10 – 10