Épreuve du jeudi 1er avril 2010

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— Un actif S vaut $S_0 = 30$€ à la date $t = 0$. À la date $t = 1$ cet actif peut valoir $S_1^u = 32$€ ou $S_1^d = 29$€.
Le taux sans risque est supposé nul : $r = 0$.
Un call sur S de strike $K = 31$ et d'échéance $T = 1$ est négocié au prix de $1/2$€.

a. Le marché présente-t-il une opportunité d'arbitrage ? (justifier votre réponse)

b. Si un arbitrage est possible, décrivez la stratégie mise en œuvre pour exploiter cet arbitrage.
Si au contraire il n'y a pas d'arbitrage, décrivez la stratégie de couverture delta-neutre d'un trader qui aurait vendu cette option.
Dans tous les cas, précisez les opérations effectuées (achats, ventes *etc.*) pour la stratégie décrite.

2.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}05$ et $d = 0{,}90$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1\%$.
On considère le put *américain* sur le sous-jacent S, de prix d'exercice $K = 19$€ et d'échéance $T = 3$ périodes.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

c. On suppose que l'actif subit trois baisses consécutives : à quelle date est-il optimal d'exercer ce put ?

On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max\big((K - S_t)_+ \ , \ B_{\delta t}^{-1}\mathbf{E}_q(p_{t+\delta t}|S_t)\big)$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt.

---

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 10 − 10