

Épreuve du mardi 17 mars 2008

CORRIGÉ

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à deux étapes. On suppose que $S_0 = 40 \text{ €}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,15$ et $d = 0,9$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 5\%$. On utilisera l'approximation $e^r \approx 1 + r$.

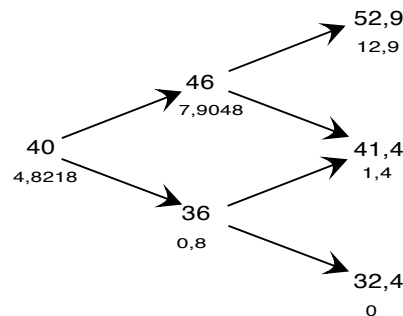
a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. On considère le call européen sur le sous-jacent S , de prix d'exercice $K = 40 \text{ €}$ et d'échéance $T = 2$, la fin de la seconde période. Déterminer le prix du call à la date $t = 0$ ainsi que les prix du call à la date intermédiaire $t = 1$.

c. On constate sur le marché un prix de 5 € pour ce call à la date $t = 0$. Quelle stratégie d'arbitrage mettra-t-on en œuvre pour tirer profit de ce prix ?

Solution

a. et b. Les résultats sont reportés sur le dessin ci-dessous. Les calculs se font en utilisant la probabilité de martingale $q = 3/5$: le prix du call à la date t et pour chaque valeur S_t du sous-jacent est l'espérance actualisée du pay-off conditionnée par S_t .



c. Le prix d'arbitrage du call est inférieur au prix trouvé sur le marché. On exploite l'arbitrage en vendant le plus possible de calls et en achetant autant de portefeuilles de couverture : le bilan de ces opérations sera pour chaque call de $5 - 4,8218 = 0,1782 \text{ €}$.

Pour chaque call, la quantité de sous-jacent à détenir en couverture à la date d'écriture est $\varphi_1 = 0,7105$ parts et il faudra emprunter $b = 0,7105 \times 40 - 4,8218 = 23,5973 \text{ €}$ au taux du marché de l'actif sans risque.

On modifiera ces portefeuilles à $t = 1$ de manière à les maintenir autofinancés et à continuer à couvrir les calls vendus. À l'échéance on liquidera ces portefeuilles pour payer le call si l'on est appelé par le client acheteur. La somme correspondant à la différence $0,1782 \text{ €}$ par call nous sera définitivement acquise.

2.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 30 \text{ €}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,08$ et $d = 0,93$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 3\%$. On utilisera l'approximation $e^r \approx 1 + r$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. On considère le put américain sur le sous-jacent S , de prix d'exercice $K = 28 \text{ €}$ et d'échéance $T = 3$. Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.

c. Déterminer la date à laquelle l'exercice du put est optimal. Préciser la ou les valeurs du put et du sous-jacent lors de l'exercice optimal.

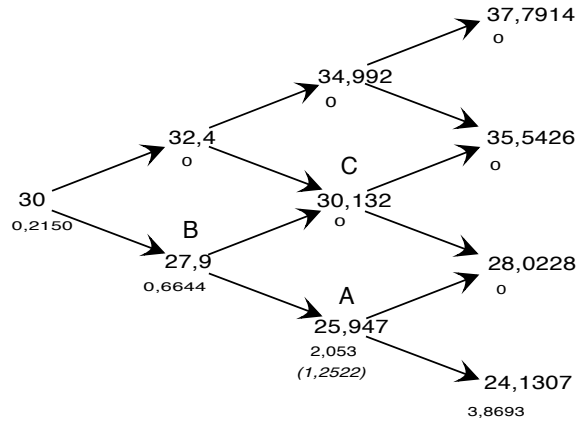
On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max(B_{\delta t}^{-1} \mathbf{E}_q(p_{t+\delta t} | S_t), (K - S_t)_+)$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt .

Solution

a. et b. Les résultats sont consignés dans la figure ci-dessous :



La probabilité de martingale est $q = 2/3$. Au nœud A de l'arbre, le prix d'arbitrage serait de 1,2522 € si le put n'était pas exerçable (espérance risque-neutre actualisée). Cependant l'exercice de ce put américain fournit 2,053 € à son détenteur, c'est donc le prix de ce put.

En conséquence le prix au nœud B est 0,6644 € qui est l'espérance actualisée des prix aux nœuds A et C et qui est en outre supérieur à ce que rapporterait l'exercice, soit 0,1 €. En B l'exercice n'est pas optimal, ni d'ailleurs à la date $t = 0$.

c. L'exercice est donc optimal en A uniquement, c'est-à-dire à la date $t = 2$ et pour un prix de sous-jacent $S_2 = 25,947$ €. Le put est alors exercé au prix de 2,053 €.

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 10 – 10