

Épreuve du jeudi 1er avril 2010

CORRIGÉ

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— Un actif S vaut $S_0 = 30\text{€}$ à la date $t = 0$. À la date $t = 1$ cet actif peut valoir $S_1^u = 32\text{€}$ ou $S_1^d = 29\text{€}$. Le taux sans risque est supposé nul : $r = 0$.

Un call sur S de strike $K = 31$ et d'échéance $T = 1$ est négocié au prix de $1/2\text{€}$.

a. Le marché présente-t-il une opportunité d'arbitrage ? (justifier votre réponse)

b. Si un arbitrage est possible, décrivez la stratégie mise en œuvre pour exploiter cet arbitrage.

Si au contraire il n'y a pas d'arbitrage, décrivez la stratégie de couverture delta-neutre d'un trader qui aurait vendu cette option.

Dans tous les cas, précisez les opérations effectuées (achats, ventes *etc.*) pour la stratégie décrite.

Solution

a. Si l'on ne tient pas compte du prix du call proposé par le marché, le modèle ne présente pas d'opportunité d'arbitrage puisque la relation $S_1^d < S_0 \times (1 + r) < S_1^u$ est vérifiée. En particulier les prix d'actifs dérivés européens peuvent être calculés comme espérances actualisées des prix possibles à la date $T = 1$ à l'aide de la probabilité de martingale, laquelle vaut ici

$$q = \frac{S_0 \times (1 + r) - S_1^d}{S_1^u - S_1^d} = \frac{1}{3}.$$

Pour le call-31 on trouve que le prix d'arbitrage à $t = 0$ est $c_0 = 1/3\text{€}$. Or le prix proposé sur le marché est $1/2\text{€}$: il y a donc une possibilité d'arbitrage sur ce call.

b. Pour réaliser cet arbitrage, il faut vendre le plus possible de calls au prix unitaire de $1/2\text{€}$ (c'est le prix du marché, on ne pourrait pas le vendre ni l'acheter à un autre prix) et acheter une quantité équivalente de portefeuilles de répliation.

Chacun de ces portefeuilles a pour valeur à $t = 0$ le prix d'arbitrage du call, soit $1/3\text{€}$. À l'échéance T , on sait que la valeur de la répliation couvrira exactement les éventuels paiements que l'on doit effectuer en faveur de l'acheteur des calls. Ainsi on s'assure immédiatement d'un gain sans risque de $1/2 - 1/3 = 1/6\text{€}$. On peut faire ce que l'on veut de cette somme, la consommer ou la placer sur un compte rémunéré, puisqu'on n'a besoin que de $1/3\text{€}$ par call vendu pour construire la répliation.

Précisons les opérations à effectuer. Le delta du call est $1/3$: la répliation d'un call doit contenir $1/3$ d'actif sous-jacent ; on devra donc payer $30 \times 1/3 = 10\text{€}$ pour cet achat. Pour chaque call vendu on doit donc emprunter cette somme, diminuée de $1/3\text{€}$ que l'on a prélevé sur le $1/2\text{€}$ perçu pour la vente du call. Ainsi on doit se constituer le portefeuille $(-29/3\text{€}, 1/3 \text{ parts de } S)$ pour couvrir à l'échéance exactement le pay-off du call vendu.

Comme on l'a vu plus haut, cette répliation valant $1/3\text{€}$, la stratégie d'arbitrage rapportera $1/6\text{€}$ par call vendu.

2.— On se place dans un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20\text{€}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,05$ et $d = 0,90$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 1\%$.

On considère le put *américain* sur le sous-jacent S , de prix d'exercice $K = 19\text{€}$ et d'échéance $T = 3$ périodes.

- Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.
- Déterminer le prix de ce put à la date initiale $t = 0$.
- On suppose que l'actif subit trois baisses consécutives : à quelle date est-il optimal d'exercer ce put ?

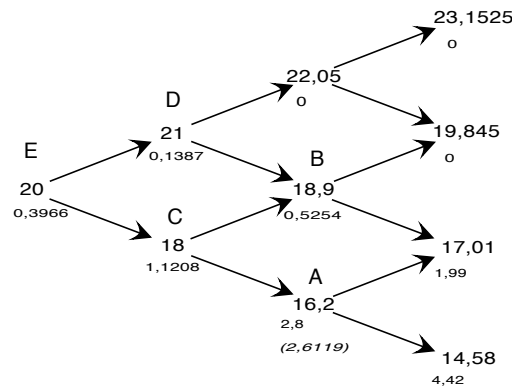
On rappelle que le prix p_t du put américain vérifie

$$p_t = \max((K - S_t)_+, B_{\delta t}^{-1} \mathbf{E}_q(p_{t+\delta t} | S_t))$$

où $B_{\delta t}$ désigne le facteur d'actualisation sur l'intervalle temporel δt .

Solution

a. et b. Le graphique ci-dessous donne la dynamique de S et celle du put :



La probabilité de martingale vaut ici $q = \frac{1,01-0,90}{1,05-0,90} = \frac{11}{15} \approx 0,7333$.

Au nœud A de l'arbre, le chiffre entre parenthèses indique le prix calculé à l'aide de l'espérance risque-neutre. Le prix d'exercice étant supérieur, c'est ce dernier qui est retenu pour le prix du put américain à la date $t = 2$ si l'actif S a subi deux baisses.

D'une manière générale les prix sont calculés à l'aide de la formule $p_t = \max((K - S_t)_+, B_{\delta t}^{-1} \mathbf{E}_q(p_{t+\delta t} | S_t))$. Les calculs sont effectués pas à pas, en descendant de la date $t = 3$, l'échéance, où le put a pour valeur le pay-off, jusqu'à la date $t = 0$. On trouve finalement

$$p_0 \approx 0,3966\text{€}.$$

Exemples de calculs :

Au nœud A, l'exercice rapporte 2,8€. Quant au prix calculé « à l'européenne » il est égal à

$$\frac{1}{1,01} \left(\frac{11}{15} \times 1,99 + \frac{4}{15} \times 4,42 \right) \approx 2,6119\text{€}.$$

Le prix du put est donc $p_A = \max(2,8, 2,6119) = 2,8\text{€}$.

Au nœud B, l'exercice rapporte 0,1€ qui est inférieur au « prix européen » de l'étape, approximativement 0,5254€. C'est donc ce dernier prix qui est le prix du put américain en B.

Au nœud situé au-dessus de B, le prix est 0€ car le calcul « à l'européenne » donne évidemment 0 et l'exercice ne rapporte rien. Aux autres nœuds, on procède de même.

c. L'exercice est profitable seulement au nœud A de l'arbre, c'est-à-dire à la date $t = 2$ et si l'actif a subi deux baisses. Il est optimal d'exercer à cette date, même si le put laisse une chance de rapporter plus à l'échéance (propriété de *surmartingale*).

durée de l'épreuve : 1h30
barème approximatif : 10 – 10