Épreuve du lundi 28 avril 2008

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende.

1.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}10 \times S_t dt + 0{,}40 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 50$€ et où les coefficients 0,10 et 0,40 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité du rendement sur un an de l'actif S.
Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 58€ au bout de six mois.

2.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est celle d'un brownien géométrique. La volatilité du rendement sur un an est $\sigma = 30\%$, le prix à la date $t = 0$ est $S_0 = 40$€. Par ailleurs, le rendement annuel de l'actif sans risque B est $r = 5\%$.
À $t = 0$ un trader achète une part de sous-jacent qu'il compte revendre dans un an. Il s'assure contre une baisse du sous-jacent en achetant un put de strike $K_p = 40$€ et il finance cette assurance en vendant un call de strike $K_c = 45$€. Le put et le call sont tous les deux de maturité $T = 1$ an (option synthétique *collar*).

a. Calculer le prix du put et celui du call.

b. Le trader liquide sa position à l'échéance. Quels sont ses gains et pertes maximaux possibles à cette date ?

3.— On considère deux calls c_1 et c_2 de même strike $K = 40$€ sur un même sous-jacent S vérifiant $S_0 = 40$€ mais de maturités différentes : le call c_1 est de maturité $T_1 = 3$ mois tandis que le call c_2 est de maturité $T_2 = 6$ mois.
L'actif S est supposé suivre une dynamique de brownien géométrique dont le rendement est de volatilité annuelle σ constante égale à 30%. Le rendement annuel de l'actif sans risque B est $r = 5\%$.
À la date $t = 0$ un trader *vend* le call c_1 et *achète* le call c_2 *(spread calendaire)*. On notera $f(t, s)$ le prix du spread à la date t et pour le prix de sous-jacent $S_t = s$.

a. Déterminer le prix de cette option à la date $t = 0$.

b. On se place à la date T_1 et on suppose qu'à cette date l'option est à la monnaie : $S_{T_1} = 40$€. On suppose aussi que les paramètres r et σ n'ont pas changé.
Déterminer le prix du spread.

c. Si le trader liquide sa position à la date T_1, quel est le rendement de la stratégie de spread ?

d. (cette question est indépendante des précédentes) On rappelle l'identité

$$(ID) \qquad S_t N'(d_1) = K e^{-r(T-t)} N'(d_2)$$

sous les notations habituelles des formules de Black-Scholes.
Montrer l'égalité

$$(Vega) \qquad \frac{\partial c}{\partial \sigma}(t, S_t) = S_t N'(d_1) \sqrt{T-t}.$$

où c désigne le prix Black-Scholes d'un call.

e. On revient au spread calendaire : on se place encore à la date T_1 et sous l'hypothèse que l'option est à la monnaie.
On suppose qu'à cette date la volatilité du sous-jacent a augmenté : le rendement de l'option est-il inférieur ou supérieur au rendement trouvé dans la question **c.** ?

---

durée de l'épreuve : 3h
barème approximatif : 4 – 4 – 12

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$