Épreuve du jeudi 23 avril 2009

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende. Les options sont européennes. On reprend les notations habituelles.

1.— Un dérivé sur S d'échéance T paye $90 - S_T$ si $S_T < 95$ et -5 sinon (autrement dit, si $S_T \geq 95$ le détenteur de l'option doit verser 5 € au vendeur).

a. Dessiner le pay-off de ce dérivé.

b. Décomposer ce dérivé en une option vanille (call ou put) et une position sur le marché monétaire.

2.— Un actif S se négocie aujourd'hui à 28 €. On achète deux calls sur cet actif de strike 31 €, d'échéance 6 mois, et on vend un call de strike 28 € et de même échéance (option *long call backspread*).

a. Dessiner le pay-off de cette option.

b. Le taux sans risque est $r = 0{,}05$ et la volatilité est $\sigma = 25\%$. Calculer le prix de chaque call.
Déterminer ensuite le bilan monétaire de notre position à $t = 0$ sur le call backspread.

c. Quels sont les pertes et les profits maximaux possibles ? Préciser les points-morts.

d. Si on utilise une telle stratégie d'investissement, quelles anticipations a-t-on sur le prix de S et sur sa volatilité ?

e. Calculer le rendement de cette stratégie (rapporté au prix d'achat des deux calls-31) dans le cas où S termine à 35 €. On exprimera le résultat en pourcentage.

f. Au bout de trois mois, les conditions du marché ont changé : la volatilité est montée à 35%. À cette date le sous-jacent est à 31 €. On revend l'option. Quel prix peut-on en proposer ?
Quel rendement, rapporté à l'achat initial des deux calls-31, a-t-on tiré de cette opération ?

---

durée de l'épreuve : 2h
barème approximatif : 6 – 14

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$