

Épreuve du jeudi 23 avril 2009

CORRIGÉ

Les actifs S sont supposés ne pas rendre de dividende. Les options sont européennes. On reprend les notations habituelles.

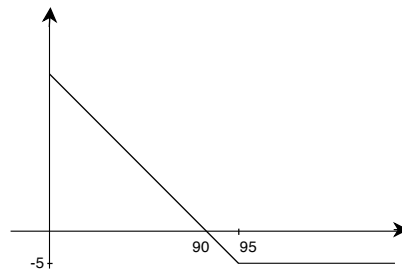
1.— Un dérivé sur S d'échéance T paye $90 - S_T$ si $S_T < 95$ et -5 sinon (autrement dit, si $S_T \geq 95$ le détenteur de l'option doit verser 5€ au vendeur).

a. Dessiner le pay-off de ce dérivé.

b. Décomposer ce dérivé en une option vanille (call ou put) et une position sur le marché monétaire.

Solution

a. et b. Le dérivé se décompose en un put acheté de strike 95 et un emprunt, remboursable à la même échéance T , de $e^{-rT} \times 5\text{€}$.



Long put-95, short zéro-coupon nominal 5

2.— Un actif S se négocie aujourd'hui à 28€ . On achète deux calls sur cet actif de strike 31€ , d'échéance 6 mois, et on vend un call de strike 28€ et de même échéance (option *long call backspread*).

a. Dessiner le pay-off de cette option.

b. Le taux sans risque est $r = 0,05$ et la volatilité est $\sigma = 25\%$. Calculer le prix de chaque call.

Déterminer ensuite le bilan monétaire de notre position à $t = 0$ sur le call backspread.

c. Quels sont les pertes et les profits maximaux possibles ? Préciser les points-morts.

d. Si on utilise une telle stratégie d'investissement, quelles anticipations a-t-on sur le prix de S et sur sa volatilité ?

e. Calculer le rendement de cette stratégie (rapporté au prix d'achat des deux calls-31) dans le cas où S termine à 35€ . On exprimera le résultat en pourcentage.

f. Au bout de trois mois, les conditions du marché ont changé : la volatilité est montée à 35% . À cette date le sous-jacent est à 31€ . On revend l'option. Quel prix peut-on en proposer ?

Quel rendement, rapporté à l'achat initial des deux calls-31, a-t-on tiré de cette opération ?

Solution

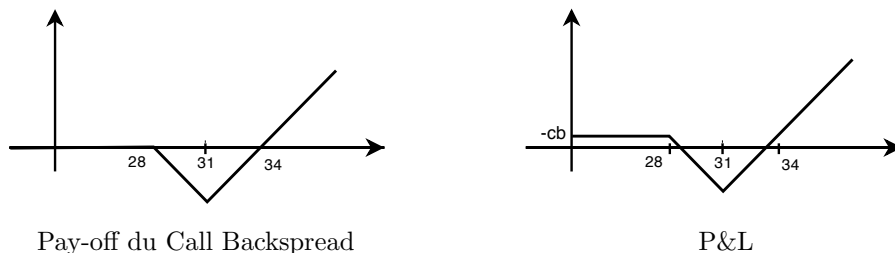
a. voir le graphique ci-dessous, question c.

b. call-31 : $d_2 = -0,5227$, $d_1 = -0,3460$, $c_{31} = 1,123\text{€}$

call-28 : $d_2 = 0,0530$, $d_1 = 0,2230$, $c_{28} = 2,313\text{€}$

call backspread : $cb = 2c_{31} - c_{28} = -0,066\text{€}$: autrement dit la vente à découvert rapporte plus que la somme nécessaire pour l'achat des deux calls-31, il nous reste $0,066\text{€}$ à la date $t = 0$.

c.



Profits : illimités si S_T en forte hausse à l'échéance ; limités au bilan monétaire si S_T en baisse.
 Pertes : limitées à $3 + cb = 2,934\text{€}$ lorsque S_T est entre les deux points-morts 28,066 et 33,934. La perte max est subie pour $S_T = 31\text{€}$.

d. hausse du sous-jacent ; hausse de la volatilité implicite

e. En examinant le pay-off on voit que le backspread rapporte 1€ auquel on rajoute le bilan initial de $0,066\text{€}$. Le rendement est donc

$$\frac{1 - cb}{2c_{31}} = 0,475 \approx 47\%$$

f. On calcule les prix des nouveaux calls. L'échéance est passée à trois mois ($T = 0,25$), le prix spot du sous-jacent est 31€ et la volatilité est maintenant $0,35$.

call-31 : $nd_2 = -0,0161$, $nd_1 = 0,1589$, $nc_{31} = 2,346\text{€}$

call-28 : $nd_2 = 0,5655$, $nd_1 = 0,7405$, $nc_{28} = 4,138\text{€}$

call backspread : $ncb = 2nc_{31} - nc_{28} = 0,554\text{€}$.

En vendant trois mois avant l'échéance, avec un prix de sous-jacent défavorable mais sous le nouveau régime de volatilité, on obtient encore un rendement positif de valeur

$$\frac{ncb - cb}{2c_{31}} = 0,276 \approx 28\%$$

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(f_T | S_t = s)$$

où \mathbf{Q} désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T , sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0, T]$, est donné par la formule

$$c(t, s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln \frac{s}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\}$$

et

$$d_2 = d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln \frac{s}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\}.$$

durée de l'épreuve : 2h
 barème approximatif : 6 - 14