

Épreuve du jeudi 14 juin 2007
durée : 2h

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20\text{€}$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,1$ et $d = 0,9$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

- Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.
- Un trader vend un call européen de prix d'exercice $K = 20\text{€}$ et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du call à la date $t = 0$.
- On suppose que l'actif sous-jacent subit deux hausses consécutives puis une baisse : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.
- Quelle serait la prime d'un put européen de même prix d'exercice et de même échéance ? S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ?
- Un trader a acheté le put européen précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture. À la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté à l'insu du marché : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1,4$ et le facteur de baisse $d' = 0,6$. Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ?

2.— On se place dans un marché (B, S) soumis aux hypothèses Black-Scholes-Merton. Un trader achète à la date $t = 0$ une part de l'actif S et vend un call européen c ayant S comme sous-jacent (*stratégie de call couvert*).

Le prix spot de l'actif est $S_0 = 28,20\text{€}$. La maturité est $T = 1$ mois, soit un douzième d'année. Le taux sans risque annuel est $r = 6\%$ et la volatilité annuelle de S est $\sigma = 30\%$. Enfin le prix strike est 30€ .

- Calculer le prix du call c contenu dans cette stratégie.
- Déterminer le coût à la date $t = 0$ de cette stratégie.
- Déterminer la perte maximale que peut enregistrer le trader. Déterminer de même son gain maximum possible.
- Déterminer le point mort de cette stratégie, c'est-à-dire la valeur S_T de l'actif S à l'expiration telle que le trader n'enregistre ni gain ni perte.
- Quel est le rendement de cette stratégie si le sous-jacent atteint les 30€ ?

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique.

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T , sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0, T]$, est donné par la formule

$$c(t, s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln \frac{s}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right\}$$

et

$$d_2 = d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln \frac{s}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right\}.$$