Épreuve du vendredi 13 juin 2008
durée : 2h

1.— On considère un modèle Cox-Ross-Rubinstein de marché (B, S) à trois étapes. On suppose que $S_0 = 30$€ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1{,}05$ et $d = 0{,}95$. Le rendement non-risqué sur chaque période est $r = 2\%$.

a. Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre et donner la probabilité de martingale.

b. Un trader vend un put européen de prix d'exercice $K = 30$ € et commence ses opérations de couverture delta-neutre. Déterminer le prix du put à la date $t = 0$.

c. On suppose que l'actif sous-jacent subit deux baisses consécutives puis une hausse : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.

d. S'il s'agissait d'un put américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son put de manière anticipée ? Si c'est le cas, déterminer la date à laquelle l'exercice sera optimal. Calculer ensuite le prix du put américain.

e. Un trader a acheté le put *européen* précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture. À la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté à l'insu du marché : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1{,}1$ et le facteur de baisse $d' = 0{,}9$. Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du put ?

2.— On se place dans un marché (B, S) suivant le modèle à temps continu de Black-Scholes-Merton. Le prix spot de l'actif est $S_0 = 3{,}42$€. L'actif S ne rend pas de dividende.

Un trader vend à la date $t = 0$ un call c_1 de strike $K_1 = 3{,}50$€ sur le sous-jacent S et achète deux calls c_2 de strike $K_2 = 3{,}75$€ *(call ratio backspread, CRB)*.
La maturité est $T = 3$ mois, soit 0,25 année. Le taux sans risque annuel est $r = 6\%$ et la volatilité annuelle des retours de S est $\sigma = 40\%$.

Tous les prix seront arrondis à deux décimales.

a. Calculer le prix de l'option CRB.

b. Dessiner le pay-off de l'option. Sur le même graphique dessiner le diagramme des "pertes et profits" (pay-off diminué du coût de l'option).

c. Déterminer la perte maximale que peut enregistrer le trader. Déterminer de même son gain maximum théoriquement possible.

d. Déterminer le point mort de cette stratégie, c'est-à-dire la valeur à l'échéance S_{pm} de l'actif S telle que le trader n'enregistre ni gain ni perte.

e. Quel est le rendement de cette stratégie si le sous-jacent atteint 4€ à l'échéance ?

Formules de Black-Scholes
Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique.

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}.$$