

Épreuve du jeudi 10 mai 2007

1.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

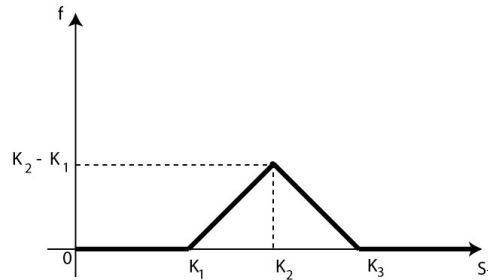
$$dS_t = 0,16 \times S_t dt + 0,32 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 30 \text{ €}$ et où les coefficients 0,16 et 0,32 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S .

Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit compris entre 30 € et 34 € au bout de trois mois.

2.— a. Dessiner le pay-off d'un portefeuille contenant un call acheté de strike $K_1 > 0$ et deux calls vendus de même strike $K_2 > K_1$. Les calls ont tous même sous-jacent et même maturité.

b. Déterminer un portefeuille constitué de quatre calls européens (achetés ou vendus) sur un même sous-jacent S , ayant même maturité T et dont le pay-off est représenté par le diagramme ci-dessous (*butterfly*) :



où $K_2 = (K_1 + K_3)/2$ i.e. K_2 est le milieu de $[K_1, K_3]$.

3.— On considère une option qui peut être répliquée en achetant un put et deux calls, tous les trois européens, de même maturité et de même strike (*strap*).

a. Dessiner le pay-off de cette option.

b. On se donne un actif S dont la dynamique est celle d'un brownien géométrique dans un marché de Black-Merton-Scholes. Sur un an le rendement sans risque est $r = 6\%$ et la volatilité de S est $\sigma = 30\%$. La valeur de S à $t = 0$ est $S_0 = 20 \text{ €}$.

Un trader vend un strap ayant S comme sous-jacent. La maturité est $T = 6$ mois, le strike est $K = 20 \text{ €}$. Calculer le prix de l'option à la date $t = 0$.

c. On rappelle que le delta d'un call est $\Delta_{call} = N(d_1)$ (notations habituelles). Quel est le delta d'un put ? (justifier la réponse)

d. Le trader décide de couvrir l'option à l'aide d'un portefeuille delta neutre. Déterminer le portefeuille de couverture qu'il se constituera à la date $t = 0$.

4.— On se place dans le modèle Black-Merton-Scholes standard, dont on adopte les notations habituelles. Une compagnie financière met sur le marché un dérivé dont le pay-off est $f_T = \log S_T$.

a. Déterminer le prix f_0 de ce dérivé à la date $t = 0$.

b. Déterminer le prix f_t de ce dérivé à une date t quelconque, $0 \leq t \leq T$.

Les résultats seront exprimés en fonction de r, σ, t, T et S_t .

durée : 3h — barème approximatif : 4 - 5 - 7 - 4

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(f_T | S_t = s)$$

où \mathbf{Q} désigne la probabilité risqué neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T , sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0, T]$, est donné par la formule

$$c(t, s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln \frac{s}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right\}$$

et

$$d_2 = d_2(t, s) = d_1(t, s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \ln \frac{s}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t, s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$