Épreuve du jeudi 10 mai 2007

Corrigé

1.— Soit un actif S dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0{,}16 \times S_t dt + 0{,}32 \times S_t dW_t$$

avec $S_0 = 30$ € et où les coefficients 0,16 et 0,32 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité sur un an de l'actif S.
Calculer la probabilité pour que le prix de l'actif soit compris entre 30 € et 34 € au bout de trois mois.

Solution

La moyenne et la variance de S_t avec $t = 3$ mois, soit $t = 0{,}25$ année, sont respectivement

(1) $$\log S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t = 3{,}4284, \quad \sigma^2\, t = (0{,}16)^2.$$

On centre et on réduit la variable normale $\log S_t$ et on calcule les extrémités de l'intervalle correspondant :

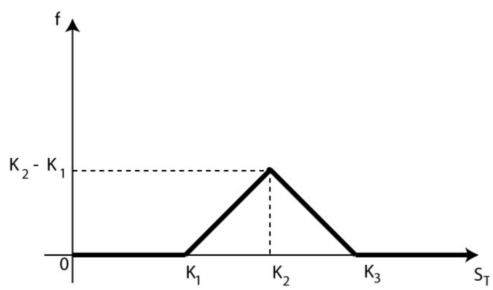
(2) $$\big(\log S_t - 3{,}4284\big)/0{,}16 \in [-0{,}17\ ;\ 0{,}6123];$$

on trouve ensuite, à l'aide de la table de loi normale, la probabilité pour que S_t soit dans l'intervalle donné :

(3). $$\mathbf{P} = 0{,}7298 - (1 - 0{,}5675) = 0{,}2973 \approx 30\%$$

2.— **a.** Dessiner le pay-off d'un portefeuille contenant un call acheté de strike $K_1 > 0$ et deux calls vendus de même strike $K_2 > K_1$. Les calls ont tous même sous-jacent et même maturité.

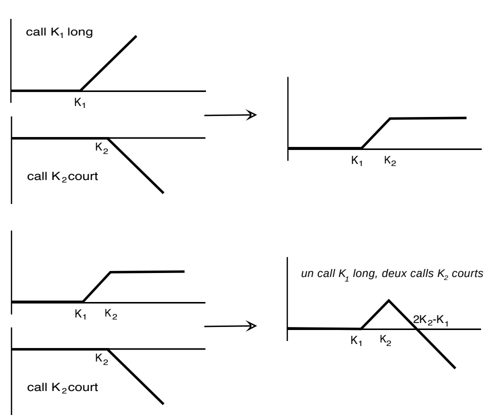
b. Déterminer un portefeuille constitué de quatre calls européens (achetés ou vendus) sur un même sous-jacent S, ayant même maturité T et dont le pay-off est représenté par le diagramme ci-dessous *(butterfly) :*



où $K_2 = (K_1 + K_3)/2$ *i.e.* K_2 est le milieu de $[K_1, K_3]$.

Solution

a. On ajoute des fonctions affines :



b. Pour compenser la partie descendante finale de ce graphe, afin d'obtenir celui d'un *butterfly,* il suffit de rajouter un call de même maturité et de strike $K_3 = 2K_2 - K_1$. Ainsi cette option peut être synthétisée à l'aide de quatre calls de même maturité : on achète un call de strike K_1 et un call de strike K_3 et l'on vend deux calls de strike commun $K_2 = (K_1 + K_3)/2$.

3.— On considère un dérivé qui peut être répliqué en vendant un put et en achetant deux calls, tous les trois européens, de même maturité et de même strike.

a. Dessiner le pay-off de ce dérivé.

b. On se donne un actif S dont la dynamique est celle d'un brownien géométrique dans un marché de Black-Merton-Scholes. Sur un an le rendement sans risque est $r = 6\%$ et la volatilité de S est $\sigma = 30\%$. La valeur de S à $t = 0$ est $S_0 = 20$ €.

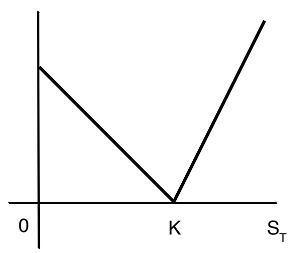
Un trader vend le dérivé ci-dessus ayant S comme sous-jacent. La maturité est $T = 6$ mois, le strike est $K = 20$ €. Calculer le prix du dérivé à la date $t = 0$.

c. On rappelle que le delta d'un call est $\Delta_{call} = N(d_1)$ (notations habituelles). Quel est le delta d'un put ? (justifier la réponse)

d. Le trader décide de couvrir le dérivé à l'aide d'un portefeuille (B, S) qui rendra sa position delta neutre. Déterminer le portefeuille de couverture qu'il se constituera à la date $t = 0$.

Solution

a. La pente du brin supérieur est 2 :



b. call et put : les formules utilisent les mêmes d_1 et d_2 :

(4) $$d_1 = 0{,}2475, \quad d_2 = 0{,}0354$$

d'où, avec N désignant la répartition de la loi normale réduite

(5) $$N(d_1) = 0{,}5977, \quad N(d_2) = 0{,}5142.$$

En notant f le prix du strap, c et p les prix du call et du put respectivement, on a

(6) $$f = 2c + p = S_0\big(3N(d_1) - 1\big) - e^{-rT}K\big(3N(d_2) - 1\big) = 5{,}3345\text{€}$$

ou bien (calcul du call puis du put par parité call-put puis du dérivé) :

(7) $$c = 1{,}9752\text{€}, \quad p = 1{,}3841\text{€}, \quad f = 2c + p = 5{,}3345\text{€}.$$

c. La relation de parité call-put est

(8) $$c(t,s) - p(t,s) = s - Ke^{-r(T-t)}$$

d'où, en dérivant par rapport à s,

(9) $$\Delta_p = \Delta_c - 1$$

d. Le portefeuille de couverture (b_f, Δ_f) est déterminé par les calculs suivants :

(10) $$\Delta_c = N(d_1) = 0{,}5977, \quad \Delta_f = 2\,\Delta_c + \Delta_p = 3\Delta_c - 1 = 0{,}7931, \quad b_f = f - \Delta_f\,S_0 = -10{,}5275\text{€}$$

Le trader emprunte 10,5275€, encaisse la prime de 5,3345€ : il a donc en caisse 15,8620€ avec lesquels il achète 0,7931 parts d'actif S au prix unitaire $S_0 = 20$€.

4.— On se place dans le modèle Black-Merton-Scholes standard, dont on adopte les notations habituelles. Une compagnie financière met sur le marché un dérivé dont le pay-off est $f_T = \log S_T$.

a. Déterminer le prix f_0 de ce dérivé à la date $t = 0$.
b. Déterminer le prix f_t de ce dérivé à une date t quelconque, $0 \le t \le T$.
Les résultats seront exprimés en fonction de r, σ, t, T et S_t.

Solution

a. et **b.** On a $f_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}\big(f_T \mid S_t\big)$ où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. En outre, sous cette même probabilité,

$$S_T = S_t \exp\big((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\big) \tag{11}$$

donc $\log S_T$ a pour loi conditionnelle à S_t une loi normale d'espérance $\log S_t + (r-\sigma^2/2)(T-t)$, et on trouve

$$f_t = e^{-r(T-t)}\big(\log S_t + (r-\sigma^2/2)(T-t)\big). \tag{12}$$

Mais on peut aussi rédiger le calcul de la manière plus concise suivante :

$$f_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}\big(\log S_t + (\mu-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t) \mid W_t\big) = e^{-r(T-t)}\big(\log S_t + (r-\sigma^2/2)(T-t)\big). \tag{13}$$

---

durée : 3h — barème approximatif : 4 - 5 - 7 - 4

Formules de Black-Scholes

Soit un actif risqué S suivant le modèle du brownien géométrique et ne versant pas de dividendes.

La formule générale du prix d'un dérivé européen écrit sur S et de pay-off f_T est

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}\big(f_T \mid S_t = s\big)$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la probabilité risque neutre. On en déduit les formules de Black-Scholes :

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif S ne versant pas de dividendes et valant s à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,s) = sN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}$$

et

$$d_2 = d_2(t,s) = d_1(t,s) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\ln\frac{s}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}.$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,s) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - sN(-d_1)$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t.$$