Petite introduction aux mathématiques des dérivés financiers
(notes de cours, version provisoire)

Michel Miniconi
Département de Mathématiques
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
Université de Nice – Sophia-Antipolis

Ces notes sont censées procurer un bagage minimum permettant de lire avec profit la littérature existante sur les mathématiques des dérivés financiers. Il s'agit donc d'une introduction rapide aux concepts et aux modèles de base de l'évaluation. Il arrivera cependant que certains résultats soient démontrés.

Ce texte présente une version provisoire d'un cours de Finance Quantitative donné à l'université de Nice. Certains chapitres sont incomplets, d'autres sont encore à l'état de projet. J'ai choisi de rendre publique cette version inachevée et informelle parce qu'il m'a semblé qu'elle pouvait être utile aux étudiants qui suivent ce cours. Certains exercices qui accompagnent le cours utilisent des notions qui ne sont pas encore rédigées dans ces notes.

I – Introduction

1. Formulation du problème à travers un exemple.

Un négociant en vins doit livrer 1000 caisses de bouteilles de vin, soit 6000 bouteilles, aux États-Unis début novembre. Le contrat avec son client est établi le 5 juillet (date $t = 0$) pour livraison dans quatre mois (le 5 novembre, date notée T). Il est stipulé que le client payera en dollars et à la date de livraison ; les deux parties se sont entendues sur le prix de 300 000 USD.

Le taux actuel EUR/USD est de 1,37 : un euro s'échange contre 1,37 dollar US. Évidemment ce taux va fluctuer au cours des quatre mois qui séparent la date d'écriture du contrat de la date de livraison. Ces variations, d'amplitude imprévisible, exposeront le négociant au *risque de change :* si le taux EUR/USD augmente, *i.e.* si le dollar chute, il touchera après conversion des devises encaissées une somme en euros inférieure à la somme attendue.

2. Quelques stratégies envisageables.

Si pour une raison quelconque le négociant ne peut éviter l'exposition au risque de change, il lui reste diverses possibilités de réduire ce risque. Nous en retiendrons deux, le contrat de vente à terme (forward ou futures) et l'option de vente (put).

a. Le forward. À la date $t = 0$, après avoir signé le contrat de vente avec son acheteur américain, le négociant conclut avec sa propre banque un contrat de vente à terme portant sur 300 000 USD. Par ce contrat, il s'engage à échanger dans quatre mois cette somme en dollars contre une somme en euros calculée à l'aide du taux de change à terme. De son côté la banque s'engage à acheter à ce taux les dollars du négociant.

Ce taux de change est déterminé aujourd'hui (date $t = 0$) par le marché des changes à terme, pour un terme de quatre mois ; il dépend des attentes du marché sur les deux devises ainsi que des taux d'intérêt domestiques en vigueur dans les deux zones concernées (EUR et USD). Mais ce qui est important pour le négociant c'est que ce taux forward est connu dès aujourd'hui et que ce sera le taux qui servira dans quatre mois pour l'échange des devises. Ce contrat supprime donc toute incertitude sur le change.

Un forward est un contrat entre deux parties, nommées l'acheteur et le vendeur. Ici, le négociant est le vendeur dans ce forward, la banque est l'acheteur : le négociant vend à terme 300 000 USD à sa banque au taux forward. Pour fixer les idées, supposons que le taux forward EUR/USD à quatre mois soit 1,40 : le négociant est assuré de recevoir à l'échéance 214 270 euros en échange de ses 300 000 dollars. Par cette opération le vendeur supprime le risque lié à une baisse importante du dollar US par rapport à l'euro.

On remarquera cependant que si, au lieu de chuter, le dollar s'apprécie relativement à l'euro le vendeur perdra une opportunité de gain liée à une parité EUR/USD devenue avantageuse pour un exportateur. Dans cette situation c'est la banque (l'acheteur) qui réalisera un bénéfice, puisqu'elle pourra acheter les dollars au taux écrit dans le contrat forward et les revendre au taux du marché qui est plus avantageux pour elle. Si par exemple le dollar s'apprécie contre l'euro, faisant passer le taux EUR/USD à 1,30, la banque, après avoir acheté les 300 000 USD au négociant au prix de 214 270 EUR, pourra immédiatement revendre ces dollars sur le marché des devises au taux courant de 1 euro pour 1,30 dollars ; elle recevra en échange 230 769 euros, réalisant ainsi un bénéfice de près de 16 500 euros.

Pour cette raison, le négociant peut préférer se couvrir du risque de change à l'aide d'une *option* de vente.

b. L'option de vente. Par ce contrat passé avec sa banque, le négociant a la *possibilité,* mais non l'obligation, de lui vendre dans quatre mois 300 000 USD payés en euros à un taux déterminé aujourd'hui (date $t = 0$) entre les deux parties. De son côté, la banque est engagée complètement par ce contrat : si le négociant veut lui vendre à ce taux, la banque a l'obligation de lui acheter ses dollars à ce taux.

Là encore, ce contrat supprime tout risque lié à la baisse du taux de change EUR/USD. Mais à la différence du contrat forward, si le taux du marché à l'échéance des quatre mois est plus avantageux pour le négociant que le taux écrit dans le contrat, c'est-à-dire si le dollar US a grimpé par rapport à l'euro au cours des quatre mois jusqu'à dépasser à l'échéance le taux du contrat, le négociant pourra profiter de cette appréciation du dollar US par rapport à l'euro en s'adressant directement au marché des devises pour vendre ses dollars.

Cette fois-ci, le contrat est inégal, à l'avantage du négociant ; la banque assume tous les risques, puisqu'elle n'a même plus la possibilité de faire un bénéfice si le dollar s'apprécie contre l'euro ; en effet, dans ce cas le négociant ira vendre ses dollars US directement sur le marché des devises, et non auprès de sa banque selon le taux du contrat passé avec elle. Pour cette raison, en échange du risque assumé, la banque réclamera une certaine somme d'argent, appelée la prime, que devra lui verser le négociant à l'écriture du contrat.

3. Options d'achat, options de vente : calls et puts.

On appelle *option d'achat européenne (european call)* un contrat entre deux parties, l'acheteur et le vendeur du contrat, qui confère à l'acheteur le droit – mais non l'obligation – d'acheter, à une certaine date T (la maturité ou l'échéance) et à un certain prix (le strike, ou prix d'exercice) fixés à l'avance, une certaine quantité d'un produit déterminé *(le sous-jacent).* La contrepartie (le vendeur, celui qui a *écrit* l'option) a *l'obligation* de procéder à la transaction si le détenteur de l'option en manifeste le désir. En raison du caractère dissymétrique de ce contrat (*option* pour le détenteur, *obligation* pour le vendeur) et du risque lié aux fluctuations aléatoires du prix du sous-jacent, risque qui sera assumé par le vendeur, celui-ci réclamera une *prime* qui sera réglée lors de l'établissement du contrat, *i.e.* à la date $t = 0$. Pour détenir une option on doit l'acheter en versant la prime ou bien la racheter à quelqu'un qui veut s'en débarrasser. La prime et le prix de rachat sont déterminés par négociations sur les marchés de dérivés.

On notera que le sous-jacent d'une option, comme d'ailleurs celui d'un forward ou plus généralement de tout dérivé, peut être un taux de change ou une devise, mais aussi une action, un indice, une quantité de matière première, de métaux précieux, une denrée agricole, un indice boursier, une ressource énergétique *etc.* ou encore un produit dérivé de ceux-ci.

Le fait, pour le détenteur de l'option, de procéder à la transaction (pour un call, l'achat du sous-jacent) à la date T selon les termes du contrat contingent (l'option) qu'il a acheté s'appelle *l'exercice.*

À côté des options d'achat, on a vu qu'il existe les *options de vente (puts),* qui confèrent à leur détenteur le droit – mais non l'obligation – de *vendre* une quantité déterminée de sous-jacent ; si l'option est exercée, l'émetteur de l'option (le vendeur) a l'obligation d'acheter la quantité de sous-jacent prévue. Ainsi, quatre cas de figure peuvent se présenter :

- achat d'une option d'achat,
- vente d'une option d'achat,
- achat d'une option de vente,
- vente d'une option de vente.

Enfin, certaines options confèrent à leur détenteur le droit d'exercer à n'importe quelle date durant la période de maturité : on parle alors *d'option américaine (american option)* . . . sans préjuger de la position géographique où s'effectuent les transactions.

4. Encore un peu de terminologie.

D'une manière générale, lorsque l'on a vendu à terme une certaine quantité d'un actif (option, action, taux, or, pétrole. . .), on dit que l'on détient une *position courte (short position)* sur cet actif. Dans le cas d'un achat, on parle de *position longue (long position).*

La *valeur intrinsèque* d'une option à une date donnée est la quantité de cash qui serait créditée à son détenteur si celui-ci exerçait immédiatement l'option, en eût-il la possibilité, puis fermait sa position sur le sous-jacent au prix du marché. Par exemple si le sous-jacent se négocie à 90€, un call 85€ a une valeur intrinsèque de 5€. En effet, en exerçant (éventuellement) cette option le détenteur du call 85€ achèterait le sous-jacent à 85€. S'il le revendait ensuite 90€ sur le marché, il aurait finalement encaissé 5€.

La différence entre le prix d'une option à une date donnée et sa valeur intrinsèque est appelée *valeur temporelle* ou *valeur extrinsèque.* Si un call 85€ se négocie 8€ avec un sous-jacent à 90€, sa valeur intrinsèque est de 5€ et sa valeur temporelle est de 3€ ; la somme de ces deux valeurs égale toujours le prix de l'option.

Lorsqu'une option a une valeur temporelle nulle, son prix est égal à sa valeur intrinsèque. Dans ce cas on dit qu'elle cote *à parité.*

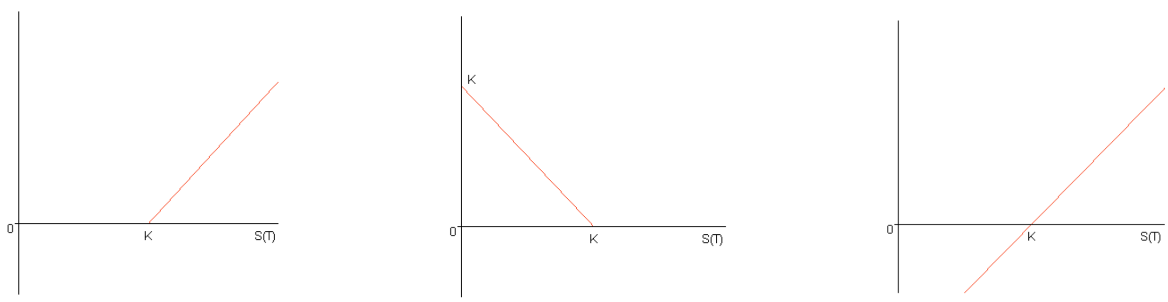
Une option qui possède à une certaine date une valeur intrinsèque positive est dite *dans la monnaie (in-the-money)* ou *dans le cours*. Si au contraire elle n'a pas de valeur intrinsèque, elle est dite *hors de la monnaie (out-of-the-money)* ou *hors du cours*. Lorsque la valeur du sous-jacent est identique au prix d'exercice, on dit que l'option est *à la monnaie (at-the-money)*. Techniquement, une telle option est hors la monnaie puisque sa valeur intrinsèque est nulle. Mais sa valeur temporelle est maximum et ce type d'options fait l'objet d'un trade intensif, c'est pourquoi on leur donne un nom particulier.

5. Le juste prix.

Une option est un «produit dérivé» en ce sens qu'elle est définie en termes d'un actif, financier ou non, sous-jacent. La valeur d'une option varie tout au long de sa durée de vie, en fonction des fluctuations aléatoires du prix du sous-jacent.

Le prix de départ de l'option est la prime versée par l'acheteur à la date où l'option est écrite. Son prix à la date de maturité est le *pay-off* de l'option, la somme que devra débourser le vendeur pour honorer le contrat (*voir* figure plus bas). Cette somme est nulle si le détenteur de l'option n'exerce pas ; il perd alors le montant de la prime.

Soit $[0, T]$ la période de maturité. On notera S_t le prix du sous-jacent à la date $t \in [0, T]$. Le modèle mathématique de ce prix sera un *processus aléatoire :* pour tout t, S_t est une variable aléatoire définie sur l'ensemble Ω des "états du monde (du marché)" *i.e.* de toutes les trajectoires de prix envisageables dans la période de référence. L'ensemble Ω est muni d'une structure d'espace probabilisé sur laquelle nous reviendrons plus tard. Il nous suffit pour l'instant d'interpréter la probabilité en question comme une mesure des chances pour que, à différents instants t, le prix du sous-jacent atteigne telle ou telle plage de valeurs. Nous verrons d'ailleurs que cette probabilité du "monde réel" n'intervient pas dans l'évaluation *(pricing)* des options, pour laquelle elle est remplacée par une probabilité dite "risque-neutre."



(a) *(b)* *(c)*

Pay-off : (a) d'un call ; (b) d'un put ; (c) d'un forward

Le processus du prix de l'option, $f_t = f(t, S_t)$, est guidé par la dynamique du prix du sous-jacent. À la date T, ce prix f_T est égal au pay-off : c'est une fonction qui dépend du prix spot S_T du sous-jacent. On doit alors répondre aux deux questions suivantes :

– quel est le “juste prix” pour ce contrat *i.e.* le montant de la prime ?
– quelle stratégie doit adopter le vendeur pour se prémunir du risque financier à la date d'expiration ?

En ce qui concerne l'évaluation de la prime, une solution naturelle serait de prendre la valeur moyenne du pay-off f_T actualisée à la date $t = 0$ *i.e.* quelque chose comme

$$e^{-rT}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f_T)$$

où r représente le taux d'intérêt “non-risqué” (supposé constant) pour une somme investie durant la période de référence et où $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$ représente l'espérance calculée à l'aide de la probabilité estimée, ou “monde réel,” $\mathbf{P}$.

Dans la suite de ce cours nous verrons que cette méthode de valuation n'est pas une bonne méthode. Nous montrerons que sous certaines hypothèses concernant le marché, le montant de la prime peut être déterminé de façon unique. Nous décrirons une méthode pour déterminer cette prime, ainsi que la valeur f_t de l'option à toute date intermédiaire $t \in [0, T]$. Ce faisant, nous répondrons aussi à la seconde question, celle de la détermination d'une stratégie de couverture *(hedging)* du risque financier pour le vendeur.

6. Quelques propositions de lectures.

a. Ouvrages généraux (Finance, Probabilités) :

[Back] BACK K., *A Course In Derivative Securities - Introduction to Theory and Computation,* Berlin Heidelberg, Springer Finance, 2005.

[Bjö] BJÖRK T., *Arbitrage Theory in Continuous Time, 3rd ed.* Oxford, OUP, 2009.

[Bre] BREIMAN L., *Probability,* Philadelphia, PA, SIAM Classics In Applied Mathematics, 7, 2007.

[Dan-JPicq] DANA R.-A., JEANBLANC-PICQUÉ M., *Marchés financiers en temps continu - Valorisation et équilibre, 2ème édition,* Paris, Economica, 1998.

[Eth] ETHERIDGE A., *A Course in Financial Calculus,* Cambridge, CUP, 2002.

[Föll-Sch] FÖLLMER H., SCHIED A., *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time,* Berlin, Walter de Gruyter, 2002.

[Fra] FRANÇOIS P., *Les produits dérivés financiers - Méthodes d'évaluation,* Paris, Dunod, 2005.

[Hull] HULL J.C., *Options, Futures & Other Derivatives, 8th ed,* USA, Prentice Hall, 2009.
Cette huitième édition est traduite en français (Pearson Education France, 2011). Il existe aussi un manuel d'exercices corrigés associé à cet ouvrage.

[Jäck] JÄCKEL P., *Monte Carlo Methods in Finance,* Chichester UK, John Wiley & Sons, 2004 (2002).

[Josh1] JOSHI M., *The Concepts and Practice of Mathematical Finance, 2nd ed.* Cambridge, CUP, 2008.

[Josh2] JOSHI M., *C++ Design Patterns and Derivatives Pricing, 2nd ed.* Cambridge, CUP, 2008.

[Kle] KLEBANER F. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications, 2nd ed.* London, Imperial College Press, 2005.

[Lamb-Lap] LAMBERTON D., LAPEYRE B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance,* Paris, Ellipses, 1997.

[Mö-Per] MÖRTERS P., PERES Y., *Brownian Motion,* Cambridge, CUP, 2010.

[Mus-Rut] MUSIELA M., RUTKOWSKI M., *Martingale Methods in Financial Modelling, 2nd edition, corrected 2nd printing,* Berlin, Springer, 2007.

[Neft] NEFTCI S. N., *Principles of Financial Engineering,* San Diego CA, Academic Press, 2004.

[Por-Pon] PORTAIT R., PONCET P., *Finance de Marché - Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques,* Paris, Dalloz, 2008.

[Øks] ØKSENDAL B., *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications, 5th ed.* Berlin, Springer, 1998.

[Rock] Rockinger M., *Investments,* Paris, PUF, coll. Que sais-je ?, 2004.

[Stee] Steele J. Michael, *Stochastic Calculus and Financial Applications,* New York, Springer, 2001.

[Var1] Varadhan S. R. S., *Probability Theory,* New-York, Courant Lecture Notes in Mathematics, 7, 2001.

[Var2] Varadhan S. R. S., *Stochastic Processes,* New-York, Courant Lecture Notes in Mathematics, 16, 2007.

[Will] Williams D., *Probability with Martingales,* Cambridge UK, CUP, 1991.

[W] Wilmott P., *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance,* UK, John Wiley & Sons, 2001.

[WHD] Wilmott P., Howison S., Dewynne J., *The Mathematics of Financial Derivatives - A Student Introduction,* Cambridge, CUP, 2002 (first pub. 1995).

b. Lectures complémentaires :

[DGMOP] Dacorogna M. M., Gençay R., Müller U., Olsen R. B., Pictet O. V., *An Introduction to High-Frequency Finance,* USA UK, Academic Press (Elsevier), 2001.

[Gath] Gatheral J., *The Volatility Surface - A Practitioner's Guide,* Hoboken (NJ) USA, John Wiley & Sons, 2006.

[God1] Godechot O., *Les traders, essai de sociologie des marchés financiers,* Paris, Éd. La Découverte, 2001.

[God2] Godechot O., *Working Rich - Salaires, bonus et appropriation du profit dans l'industrie financière,* Paris, Éd. La Découverte, 2007.

[JJP] Johnson N. F., Jefferies P., Pak Ming Hui, *Financial Market Complexity - What Physics can tell us about Market Behaviour,* Oxford, OUP, 2003.

[JPR] Jondeau E., Poon S.-H., Rockinger M., *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions,* Springer Finance, London, 2007.

[McKen] MacKenzie D., *Material Markets - How Economics Agents Are Constructed,* Oxford, OUP, 2009.

[Nat] Natenberg S., *Option Volatility and Pricing - Advanced Trading Strategies and Techniques, 2nd ed.,* New York USA, McGraw-Hill, 1994.

[OBBFJL] Overhaus M., Bermùdez A., Buehler H., Ferraris A., Jordinson C., Lamnouar A., *Equity Hybrid Derivatives,* Hoboken NJ, John Wiley & Sons, 2007.

[Pau] Paulos J.A., *A Mathematician Plays The Market,* London, Penguin Books, 2004.

[Reb] Rebonato R., *Volatility and Correlation - The Perfect Hedger and The Fox, 2nd ed.,* Chichester UK, John Wiley & Sons, 2004.

[Tal] Taleb N., *Dynamic Hedging - Managing Vanilla and Exotic Options,* New York, John Wiley & Sons, 1997.

c. Deux articles historiques :

[B-S] Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities,* Journal of Political Economy, **81,** 637-654, 1973.

[C-R-R] Cox J.C., Ross S.,Rubinstein M., *Option Pricing : A Simplified Approach,* Journal of Financial Economics, **7,** 229-264, 1979.

II – Arbitrage

Une *opportunité d'arbitrage* est la possibilité de s'assurer d'un profit sans risque en effectuant des transactions simultanées sur un ou plusieurs marchés. L'absence d'opportunité d'arbitrage *(AOA)* est une des propriétés importantes des modèles de marchés que l'on va étudier.

Avant de continuer, précisons cette notion : on dira que le marché présente une opportunité d'arbitrage si l'on peut, par des opérations d'emprunt de monnaie et d'achat d'actif risqué, de vente à découvert et de prêt sur le marché monétaire, *et sans rien investir personnellement,* se constituer un portefeuille dont la valeur ne sera jamais négative et aura même une chance non-nulle d'être strictement positive. C'est en quelque sorte un billet de loterie que l'on recevrait en cadeau.

1. Un exemple.

a. Supposons que le prix spot aujourd'hui (date $t = 0$) de l'once d'or soit de 300 €, que le prix forward à un an soit de 340 € et que le taux d'intérêt rapporté par une somme investie en euros sur un an soit de 5%. Il y a alors une opportunité d'arbitrage, comme on le voit en se constituant le *portefeuille d'arbitrage* suivant :

- on emprunte 300 € au taux de 5% l'an,
- avec la somme empruntée, on achète une once d'or à 300 € (le prix sur le marché au comptant),
- on prend une position courte sur un forward sur l'or à 340 €.

Avec un tel portefeuille on est immédiatement assuré d'un gain de 25 €. En effet, les intérêts sur la somme empruntée s'élèvent à 15 €, mais à la date d'échéance on recevra 340 € en échange de la livraison de l'once d'or que l'on avait payée 300 € : le profit est donc $40 - 15 = 25$ €. De manière générale, tout prix forward supérieur à 315 € donnera lieu à un arbitrage.

En supposant que l'on puisse emprunter des sommes illimitées, on peut acheter autant d'onces d'or que l'on veut et en retirer autant de fois un profit de 25 €. Une opportunité d'arbitrage *("free lunch")* offre ainsi un profit théoriquement infini.

On se doute bien que de telles opportunités sont fugitives. Elles résultent d'un mauvais pricing et, étant immédiatement exploitées par les arbitrageurs, elles ne peuvent être présentes sur le marché que pendant un très court instant. Dans notre exemple, l'offre de vente sur le forward augmentant brutalement, son prix diminuera pour se stabiliser sur le marché à son juste prix : l'opportunité d'arbitrage disparaît en même temps que le prix correct s'établit par la loi de l'offre et de la demande.

b. Supposons maintenant que le prix du forward sur l'once d'or à un an soit de 310 €, les autres données étant comme en **a.** Là encore, on peut se constituer un portefeuille d'arbitrage. À condition de posséder de l'or, on procèdera aux opérations suivantes :

- vente d'or à 300 € l'once,
- placement du produit de la vente au taux de 5% sur un an,
- prise d'une position longue sur le forward à un an sur l'or à 310 € l'once.

Le profit assuré est ici de 5 € par once. En fait, tout prix de forward inférieur à 315 € donnera lieu à un arbitrage.

Exercice : Soit un actif dont le prix spot à la date $t = 0$ est S_0. On note r le taux d'intérêt "sans risque" annuel pour une somme investie pendant une période $[0, T]$. On se place dans l'hypothèse d'AOA. Montrer, en utilisant un raisonnement d'arbitrage, que le prix forward de cet actif à la date d'échéance T est $F = (1 + r)^T S_0$ ou, dans le cas d'un taux continûment composé, $F = e^{rT} S_0$.

À une date intermédiaire t, avec un taux sans risque r pour la période $[t, T]$, et un prix spot d'actif S_t, le prix forward sera

$$F_t = e^{r(T-t)} S_t. \qquad (1)$$

2. Vente à découvert.

On a vu qu'il peut être nécessaire de vendre de l'actif sous-jacent ou du dérivé pour constituer un portefeuille d'arbitrage. Sur certains marchés, il n'est pas nécessaire pour autant de posséder l'actif que l'on vend, à condition de l'avoir emprunté au préalable. On appelle *vente à découvert* cette opération *(short selling).* Sous les ordres d'un client (un investisseur, un spéculateur...) le courtier *(broker)* emprunte les parts d'actif réclamées – à condition qu'il en trouve – auprès d'un autre client et les vend sur le marché pour le compte du client investisseur. Celui-ci peut en principe maintenir sa position tant qu'il le désire. À un certain moment, il liquidera sa position en achetant au prix du marché spot (au jour de la liquidation de sa position) les parts d'actif empruntées. Le broker les replacera dans le compte du client auquel il s'était adressé pour l'emprunt.

Si entretemps le prix de l'actif a baissé, l'investisseur réalise un profit ; si le prix a monté il enregistre une perte. Les éventuels dividendes produits dans la période d'emprunt sont versés au client auprès de qui l'emprunt a été contracté. Enfin, l'emprunteur peut être forcé de clore sa position si le broker ne trouve plus de parts de cet actif à emprunter.

Clairement, les ventes à découvert offrent un moyen de spéculer à la baisse. Mais ce sont aussi des instruments de couverture contre le risque de baisse. Par exemple la position nette d'un call acheté et financé au moyen d'un emprunt d'argent présente un risque si le sous-jacent baisse ; la vente short d'une quantité adaptée de sous-jacent couvrira les risques à la baisse de cette position.

3. Parité call-put.

Les options call et put, apparemment différentes, peuvent être en réalité combinées de façon à être parfaitement corrélées. Ceci est montré par le raisonnement suivant.

Supposons que nous possédions un portefeuille constitué par

- une position longue sur un actif,
- une position longue sur un put de sous-jacent l'actif,
- une position courte sur un call de même sous-jacent,

où le call et le put ont la même échéance T et le même strike K. Notons P la valeur du put, C la valeur du call, S celle de l'actif sous-jacent et Π la valeur du portefeuille. On a

$$\Pi_t = S_t + P_t - C_t$$

à tout instant t. En particulier, à la date d'expiration T, la valeur du portefeuille sera

$$\Pi_T = S_T + \max(K - S_T, 0) - \max(S_T - K, 0) = K$$

i.e. quelle soit la valeur du sous-jacent à l'échéance, le pay-off du portefeuille sera toujours K €.

Question : quel peut être le prix, à une date quelconque $t \in [0, T]$, d'un portefeuille qui garantit un versement de K € à l'échéance T ?

La réponse est simplement le prix du portefeuille à la date T *actualisé à la date t,* autrement dit

$$\Pi_t = e^{-r(T-t)} K \tag{2}$$

si r est le taux d'intérêt composé continu pour un placement sans risque. Tout prix de portefeuille différent de ce prix donnerait lieu à une opportunité d'arbitrage. Si par exemple à la date t ce portefeuille est proposé à un prix $\Pi' < \Pi_t = e^{-r(T-t)}K$, on empruntera Π' € au taux r auprès d'une banque et avec cette somme on achètera le portefeuille. À l'échéance, on touchera le pay-off K du portefeuille et on remboursera $e^{r(T-t)}\Pi' < e^{r(T-t)}\Pi = K$ € à la banque. Cette stratégie fournit un profit sans risque de $K - e^{r(T-t)}\Pi'$ €.

Exercice : mettez au point une stratégie d'arbitrage dans le cas où le prix Π' serait supérieur à Π_t (on aura besoin de vendre short).

On déduit de la formule (2) la *relation de parité call-put :*

$$C_t - P_t = S_t - e^{-r(T-t)} K. \tag{3}$$

4. Hypothèses et notations.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- les ventes à découvert sont autorisées et l'on peut acheter des fractions quelconques d'actifs,
- le marché est liquide *i.e.* il est toujours possible d'acheter ou de vendre en quantités illimitées sur le marché ; en particulier, on peut emprunter des quantités illimitées d'argent auprès d'une banque,
- les opportunités d'arbitrage sont inexistantes,
- il n'y a pas de coûts de transactions,
- le taux d'intérêt "sans risque" (par exemple le taux auquel un état emprunte sa propre monnaie) est le même pour un emprunt et pour un prêt,
- il n'y a pas de décalage entre les prix de vente et d'achat *(bid-ask* ou *bid-offer spread)* d'un actif donné.

Dans la réalité des marchés, pratiquement aucune de ces hypothèses n'est pleinement vérifiée. Le prix réel devra d'une manière ou d'une autre intégrer ces biais, éventuellement au prix d'une modification des modèles.

Tout au long de ces notes nous utiliserons les notations suivantes :

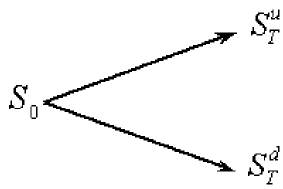
T : date de maturité du contrat, supposé établi à la date $t = 0$;
K : prix d'exercice d'une option ;
$(S_t)_t$: processus du prix de l'actif sous-jacent $(0 \leq t \leq T)$;
$(f_t)_t$: processus du prix d'un dérivé construit sur le sous-jacent de prix S_t : $f_t = f(t, S_t)$;
r : taux d'intérêt annuel sans risque, généralement pris continûment composé.

On considère un marché *sans opportunité d'arbitrage* et constitué de deux actifs B et S et de leurs dérivés. L'actif B est l'actif non-risqué, par exemple un bon du Trésor. Une position longue sur cet actif correspond à un placement au taux garanti r, une position courte à un emprunt à ce même taux. Son processus de prix est donc $B_t = e^{rt}B_0$ sur une période donnée.

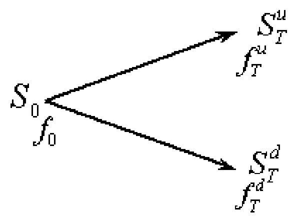
L'actif S est l'actif risqué. Dans ce chapitre nous allons proposer un modèle pour le processus de prix S_t, ainsi qu'une méthode pour déterminer la prime f_0 et plus généralement le processus de prix f_t d'un dérivé de sous-jacent S.

1. Le modèle à une étape.

Soit S_0 le prix de l'actif risqué aujourd'hui (date $t = 0$). On suppose qu'à l'échéance T les analystes n'envisagent que deux possibilités, un prix en hausse $S_T = S^u > S_0$ ou un prix en baisse $S_T = S^d < S_0$:



On estime par ailleurs à p la probabilité d'une hausse (et donc à $1 - p$ celle d'une baisse). Le prix d'un dérivé suivra lui aussi une dynamique binomiale, liée à celle de S :



où f_0 est la prime et le couple (f_T^u, f_T^d) est le prix à l'échéance, *i.e.* le pay-off. On remarquera que l'on n'a pas nécessairement $f_T^u > f_0 > f_T^d$ (considérer par exemple un put à parité *i.e.* de strike $K = f_0$).

Si le dérivé est un forward, on a vu qu'un simple raisonnement d'arbitrage nous permet de déterminer le prix à échéance, indépendamment de l'évolution du cours du sous-jacent. Il n'en est pas de même pour une option, comme le montre l'exemple suivant.

Un exemple.

Un trader vient de vendre un call de strike 50 €, à échéance T sur une action dont le cours actuel est de 50 €. On pense qu'à l'échéance le cours aura subi soit une hausse à 53 € soit une baisse à 48 €, avec des chances égales ($p = 1/2$). Pour simplifier, nous supposerons que le taux r est nul. Quel est le montant de la prime ?

Cette prime devra être suffisante pour permettre au vendeur du call de mettre en place une stratégie qui lui permettra d'honorer son contrat à l'échéance. Mais elle ne devra pas être trop élevée, sous peine de voir l'acheteur se tourner vers un vendeur moins gourmand.

Une première idée est de proposer le call au prix égal à l'espérance des gains :

$$\mathbf{E_P}(f_T) = (1/2)f_T^u + (1/2)f_T^d = (1/2) \cdot 3 + (1/2) \cdot 0 = 1{,}5 \text{ €}$$

puis, une fois le call vendu, d'attendre l'échéance. Cette manière de procéder ne protège pas le vendeur d'un risque de hausse puisque si le prix du sous-jacent monte à 53 € il devra s'acquitter de 3 €.

Il existe cependant une stratégie qui élimine ce risque et qui détermine en même temps la prime du call. Le trader va se constituer un *portefeuille de couverture (hedge portfolio)* qui contiendra à la fois une certaine quantité, de valeur b €, d'actif non-risqué et une quantité Δ de parts de sous-jacent :

- à la date $t = 0$, son portefeuille vaut $b + \Delta \cdot 50$ €,
- à l'échéance, ce même portefeuille vaudra $b + \Delta \cdot 53$ € après un mouvement de hausse, $b + \Delta \cdot 48$ € après un mouvement de baisse.

Le pay-off du call est 3 € en cas de hausse, 0 € en cas de baisse. Pour être sûr de pouvoir couvrir son contrat, il lui suffit donc de choisir la composition (b, Δ) de son portefeuille de telle manière que les deux équations suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} b + \Delta \cdot 53 &= 3 \\ b + \Delta \cdot 48 &= 0 \end{cases}$$

soit $\Delta = 3/5 = 0{,}6$ parts de sous-jacent et $b = -(3/5)48 = -28{,}8$ € (*i.e.* emprunt de 28,8 €). Dans les deux cas de figure, hausse ou baisse, la détention de ce portefeuille permettra, en le liquidant sur le marché au comptant à la date T, de s'acquitter du pay-off : on dit que l'on a *synthétisé* ou *répliqué* l'option à l'aide de ce portefeuille. On appelle parfois cette stratégie « *couverture delta-neutre.* »

À la date $t = 0$ ce portefeuille vaut $-28{,}8 + 0{,}6 \cdot 50 = 1{,}2$ € : c'est la somme minimale dont doit disposer le trader à cette date pour constituer le portefeuille. Vérifions maintenant que cette somme représente le montant exact de la prime du call.

Le prix d'arbitrage.

Tout autre prix amènerait une opportunité d'arbitrage. Supposons d'abord que l'on trouve sur un marché un prix supérieur, par exemple 1,5 €. On peut alors vendre une quantité arbitraire de calls sur ce marché et acheter simultanément autant de portefeuilles de réplication $(b, \Delta) = (-28{,}8\ , 3/5)$ dont le coût est de 1,2 €. À l'échéance, on liquide la position : avec le produit de la vente de ces portefeuilles on peut régler les calls vendus, que le sous-jacent ait monté ou baissé. On a alors réalisé un profit sans risque de $1{,}5 - 1{,}2 = 0{,}3$ € par call vendu.

De même, si le call est coté à un prix inférieur, par exemple à 1 €, on achètera des calls à ce prix et l'on vendra *short* autant de portefeuilles de réplication au prix de 1,2 €. À l'échéance, la valeur du call, qu'on l'exerce ou non, compensera exactement la valeur du portefeuille. On pourra donc liquider la position short que l'on détient sur le portefeuille et l'on aura dégagé un profit assuré de $1{,}2 - 1 = 0{,}2$ € par call acheté.

Exercice : Démontrer en toute généralité que le prix d'arbitrage est bien 1,2€.

Exercice : Examiner le cas d'un put sur le même sous-jacent avec le même strike. On déterminera la prime et on détaillera les transactions effectuées par le vendeur du put pour couvrir son contrat.

En résumé :

- à la date $t = 0$ le vendeur du call effectuera les opérations suivantes :
  - encaissement de la prime de 1,2 € ,
  - emprunt (ici, à taux zéro) de la somme de 28,8 €,
  - achat de 0,6 parts de sous-jacent ;
- à la date $t = T$ le vendeur du call liquidera sa position en vendant son sous-jacent sur le marché spot, et avec le produit de cette vente, il s'acquittera du pay-off et remboursera son prêt.

Deux remarques.

Dans ce modèle à taux d'intérêt r constant, le fait de choisir une valeur non-nulle pour r ne changerait rien à la stratégie de couverture. Seules les formules de prix seraient changées : à la date T, la somme empruntée initialement est devenue be^{rT} (formule d'intérêts composés continus). Plus important : le delta est inchangé.

Exercice : Reprendre les calculs précédents avec $T = 1$ an et avec un taux sans risque annuel de $r = 4\%$.

Il est d'autre part remarquable que dans cette formule de pricing, la probabilité de hausse p n'intervient pas. Le prix du call est le même pour toute valeur de p, alors que l'on aurait pu s'attendre à un prix d'autant plus élevé que le prix du sous-jacent a de bonnes chances de monter.

Les formules générales.

Elles découlent du système d'équations (où l'on a écrit S^u à la place de S_T^u, f^u à la place de f_T^u *etc.*)

$$\begin{cases} be^{rT} + \Delta \cdot S^u &= f^u \\ be^{rT} + \Delta \cdot S^d &= f^d \end{cases}$$

qui donnent

$$\Delta = \frac{f^u - f^d}{S^u - S^d} \quad \text{et} \quad b = e^{-rT} \cdot \frac{S^u f^d - S^d f^u}{S^u - S^d}. \tag{1}$$

On en déduit la prime

$$f_0 = S_0\Delta + b = e^{-rT}\big(qf^u + (1-q)f^d\big) \tag{2}$$

où l'on a posé

$$q = \frac{S_0 e^{rT} - S^d}{S^u - S^d}. \tag{3}$$

Une remarque.

Comme il est dit dans l'introduction à ce chapitre, les actifs du marché sont B, S et ses dérivés. Or le raisonnement précédent montre que tout dérivé peut être répliqué par un portefeuille du type (b, Δ) dans le modèle binomial. Il en va donc de même pour tout portefeuille constitué d'un nombre quelconque d'actifs de ce marché.

Théorème. *Le modèle binomial à une étape est sans opportunité d'arbitrage si et seulement si la condition suivante a lieu :*

$$S^d < S_0 e^{rT} < S^u. \tag{4}$$

Preuve : Pour montrer que la condition est nécessaire, raisonnons par l'absurde en supposant que l'une des deux inégalités n'a pas lieu. Si par exemple $S_0 e^{rT} \geq S^u$ il est plus profitable d'investir dans l'actif non-risqué. On se constitue le portefeuille ($b = S_0$ €, $\Delta = -1$) *i.e.* on vend short une action et on investit le produit de la vente sur le marché monétaire au taux r. À la date T ce portefeuille vaudra $S_0 e^{rT} - S^u$ € au minimum, procurant avec une probabilité non-nulle un profit sans risque et sans avoir investi, ce qui contredit l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Le cas $S_0 e^{rT} \leq S^d$ se traite de manière symétrique.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\Pi = (b, \Delta)$ avec $\Delta \neq 0$ un portefeuille de valeur nulle à la date $t = 0$: on a donc $b = -S_0\Delta$ et par conséquent la valeur de Π à l'échéance T sera

$$\begin{cases} \Pi^u = \Delta(S^u - S_0 e^{rT}) & \text{en cas de hausse,} \\ \Pi^d = \Delta(S^d - S_0 e^{rT}) & \text{en cas de baisse.} \end{cases}$$

Sous la condition de l'énoncé, aucune de ces deux valeurs n'est nulle et elles sont de signe opposé. Aucun profit n'est sûr, il n'y a pas d'arbitrage. □

La condition du théorème est équivalente à l'existence d'un unique couple de réels positifs (α, β) tels que $\alpha + \beta = 1$ et $S_0 e^{rT} = \alpha S^u + \beta S^d$ (coordonnées barycentriques). On retrouve alors pour α la valeur q de la formule (3).

Le retour de l'espérance.

La formule (2) ci-dessus décrit la prime comme une espérance du pay-off $f_T = \{f^u, f^d\}$ actualisée à la date $t = 0$:

$$f_0 = e^{-rT}\mathbf{E_Q}\big(f_T\big) = \mathbf{E_Q}\big(e^{-rT} f_T\big) \tag{5}$$

où $\mathbf{Q}$ désigne la mesure de probabilité qui assigne la probabilité q à une hausse du sous-jacent et la probabilité $1 - q$ à une baisse. Il ne s'agit pas là de la probabilité objective du marché, dite aussi probabilité du "monde réel." On a d'ailleurs vu que celle-ci n'intervient pas dans le pricing des dérivés.

La probabilité $\mathbf{Q}$ est une probabilité *de calcul.* Elle est définie en l'absence d'opportunité d'arbitrage et elle permet d'écrire comme une espérance non-seulement la prime d'un dérivé, mais aussi le prix à la date $t = 0$ du sous-jacent lui-même *i.e.* :

$$S_0 = e^{-rT}\mathbf{E_Q}\big(S_T\big) \qquad (6).$$

Cette mesure de probabilité est appelée *probabilité risque-neutre* ou *probabilité de martingale.*

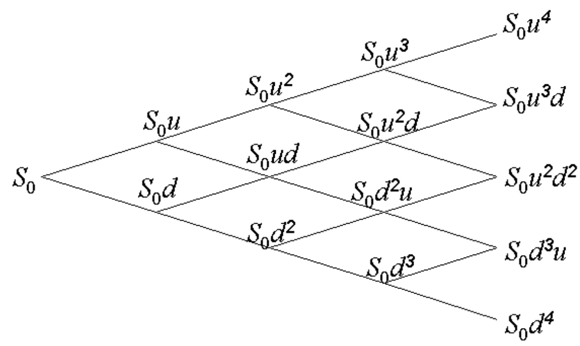
En résumé, dans le modèle binomial à une étape, l'hypothèse d'AOA est équivalente à l'existence d'une mesure de martingale. Dans le cas où tout dérivé peut être synthétisé (ou répliqué) par un portefeuille de couverture, on dit que le marché est *complet.* Le seul prix de dérivé qui n'offre pas d'opportunité d'arbitrage est le prix à la même date du portefeuille de réplication.

Ces propriétés seront aussi vérifiées par le modèle multipériode que nous allons étudier au paragraphe suivant.

2. Le modèle multipériode.

Nous décrivons ici le modèle de COX–ROSS–RUBINSTEIN (1979).

Dans le modèle à une période, le prix du sous-jacent subissait à l'échéance une hausse ou une baisse, ce qui revenait à multiplier son prix initial S_0 par un facteur $u = \frac{S^u}{S_0}$ ou $d = \frac{S^d}{S_0}$. On suppose maintenant que le prix a subi, entre les dates $t = 0$ et $t = T$, un nombre déterminé n de variations (hausses ou baisses) qui ont à chaque étape multiplié sa valeur antérieure par le coefficient u ou d. On fait l'hypothèse que ces coefficients ne dépendent pas des étapes. L'arbre suivant décrit la dynamique des prix pour $n = 4$:



La durée entre deux étapes est $\delta t = \frac{T}{n}$. Si l'on normalise cette durée en posant $\delta t = 1$ on a $T = n$, le nombre d'étapes jusqu'à l'échéance. On supposera que la condition de non-arbitrage à chaque étape (4) est vérifiée, ce qui est équivalent à

$$d < e^{r\delta t} < u. \tag{7}$$

Dans ce cas, la probabilité risque-neutre de hausse pour une étape est indépendante de l'étape et vaut

$$q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \tag{8}$$

et la probabilité de martingale $\mathbf{Q}$ est caractérisée par la relation

$$s_t = e^{-r\delta t}\mathbf{E_Q}\big(S_{t+\delta t} \mid S_t = s_t\big) \tag{9}$$

pour toute date intermédiaire $t = k\delta t$ avec $k = 0, \ldots, n-1$. Dans cette formule, s_t est une des valeurs que peut prendre la variable S_t et l'espérance conditionnelle est calculée de manière classique avec les probabilités conditionnées par l'événement $\{S_t = s_t\}$:

$$\mathbf{E_Q}\big(S_{t+\delta t} \mid S_t = s_t\big) = us_t\mathbf{Q}(S_{t+\delta t} = uS_t \mid S_t = s_t) + ds_t\mathbf{Q}(S_{t+\delta t} = dS_t \mid S_t = s_t) = (qu+(1-q)d)s_t = e^{r\delta t}s_t.$$

Remarquons que pour $t = k\delta t$, on a $s_t = S_0u^id^j$ pour un des couples (i, j) tels que $i + j = k$.

On obtient alors le prix d'un dérivé européen à la date t en fonction des prix à la date $t + \delta t$ du dérivé et du sous-jacent :

$$f_t = e^{-r\delta t}\mathbf{E_Q}\big(f_{t+\delta t} \mid S_t\big). \tag{10}$$

En itérant ce procédé de calcul à partir du prix à l'échéance du dérivé, qui doit être égal au pay-off, on trouve, pour toute date $t = 0, \delta t, 2\delta t, \ldots, (n-1)\delta t, n\delta t = T$:

$$f_t = e^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}\big(f_T \mid S_t\big) \tag{11}$$

i.e. le processus du prix actualisé $e^{-rt} f_t$ est une S_t-*martingale* sous la probabilité risque neutre $\mathbf{Q}$. On obtient en particulier le montant de la prime :

$$f_0 = e^{-rT} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\big(f_T\big). \tag{12}$$

On peut expliciter ces formules : si à la date $t = l\delta t$ le prix du sous-jacent est S_t, on a

$$f_t = e^{-r(n-l)\delta t} \sum_{i=0}^{n-l} \binom{n-l}{i} q^i (1-q)^{n-l-i} f(T, S_t u^i d^{n-l-i}). \tag{13}$$

(rappelons que $f_t = f(t, S_t)$).

En particulier, pour la prime :

$$f_0 = e^{-rn\delta t} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} f(T, S_0 u^i d^{n-i}). \tag{14}$$

Dans la pratique, on a besoin non-seulement de calculer la prime f_0 mais aussi les prix intermédiaires f_t et les portefeuilles de couverture (b, Δ) à chaque étape. Le calcul s'effectue alors à rebours à partir de la date T, où l'on sait que le prix du dérivé est égal au pay-off : on calcule tous les prix possibles du dérivé à la date $T-1$ en raisonnant, pour chacun de ces prix, sur le modèle à une période. On procède ainsi par récurrence descendante jusqu'à la date $t = 0$ où l'on obtient le montant de la prime.

On calcule en particulier le delta à chaque étape, pour chaque trajectoire possible du prix du sous-jacent. Ceci permet de déterminer l'évolution temporelle de la valeur du portefeuille de couverture et les ajustements en conséquence que le vendeur devra effectuer sur ce portefeuille pour assurer une couverture correcte tout au long de la durée de vie de l'option.

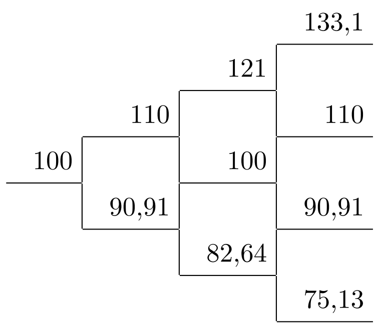
On impose parfois la condition

$$ud = 1$$

de sorte que, après une hausse et une baisse consécutives, le sous-jacent est revenu au prix de départ.

Un exemple.

On utilise le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein à trois étapes pour calculer le prix d'un call européen. Le prix initial du sous-jacent est $S_0 = 100$, le prix d'exercice est $K = 96$, la durée de l'option est $T = 3$ mois. Les facteurs *up* et *down* sont respectivement $u = 1{,}1$ et $d = 1/u = 0{,}9091$. L'arbre suivant décrit donc la dynamique du prix du sous-jacent :



Pour simplifier les calculs, le taux sans risque r est supposé nul. La couverture de l'option s'effectue en "delta-neutre."

La probabilité de martingale est donnée par la formule (8) avec $r = 0$:

$$q = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1}{u+1} = 0{,}476.$$

Pour déterminer le processus de prix $(f_t)_{t=0,\ldots,3}$ du call, on isole les deux dernières colonnes du tableau et l'on rajoute à la dernière étape les différentes valeurs du pay-off :

$$\begin{array}{r|r}
 & 133{,}1 \\
121 & \mathbf{37{,}1} \\
 & 110 \\
100 & \mathbf{14} \\
 & 90{,}91 \\
82{,}64 & \mathbf{0} \\
 & 75{,}13 \\
 & \mathbf{0}
\end{array}$$

Ce schéma est constitué de la superposition des trois branches

$$\begin{array}{r|r}
 & 133{,}1 \\
121 & \mathbf{37{,}1} \\
 & 110 \\
 & \mathbf{14}
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{r|r}
 & 110 \\
100 & \mathbf{14} \\
 & 90{,}91 \\
 & \mathbf{0}
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{r|r}
 & 90{,}91 \\
82{,}64 & \mathbf{0} \\
 & 75{,}13 \\
 & \mathbf{0}
\end{array}$$

On applique à chacune de ces branches les formules (1) et (2) du modèle à une période. On obtient les trois prix de dérivé respectifs : 25 , 6,67 et 0 ainsi que les portefeuilles de couverture respectifs $(-96\ ,1)$, $(-66{,}67\ ,0{,}7333)$ et $(0\ ,0)$, ce dernier portefeuille étant liquidé puisque l'option ne sera pas exercée.

En utilisant les trois valeurs possibles de f_2 que l'on vient de calculer, on peut continuer la procédure avec le schéma des colonnes 2 et 3, qui est une superposition des deux branches

$$\begin{array}{r|r}
 & 121 \\
110 & \mathbf{25} \\
 & 100 \\
 & \mathbf{6{,}67}
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{r|r}
 & 100 \\
90{,}91 & \mathbf{6{,}67} \\
 & 82{,}64 \\
 & \mathbf{0}
\end{array}$$

On trouve, pour le prix f_1, les deux valeurs 15,40 et 3,18 et les portefeuilles de couverture respectifs $(-80{,}63\ ,0{,}8730)$ et $(-31{,}73\ ,0{,}3840)$.

On détermine enfin la prime à l'aide du schéma des colonnes (1) et (2) :

$$\begin{array}{r|r}
 & 110 \\
100 & \mathbf{15{,}40} \\
 & 90{,}91 \\
 & \mathbf{3{,}18}
\end{array}$$

On trouve, pour la prime,

$$f_0 = 9 \text{ €}$$

et le portefeuille de couverture $(-55\ ,0{,}64)$.

En résumé, le tableau suivant donne la dynamique des prix du sous-jacent et du dérivé :

			133,1
		121	**37,1**
	110	**25**	110
100,00	**15,40**	100,00	**14**
9	90,91	**6,67**	90,91
	3,18	82,64	**0**
		0	75,13
			0

Stratégie de couverture autofinancée.

Le vendeur de l'option va se couvrir à l'aide d'un portefeuille (b, Δ) qu'il va réajuster au début de chaque nouvelle étape de façon à couvrir l'étape à venir. Si la nouvelle couverture demande une augmentation de la quantité de sous-jacent présente dans le portefeuille, il achètera la quantité qui lui manque au nouveau prix du sous-jacent ; il financera cet achat en puisant dans la quantité d'argent présente dans ce portefeuille. Si au contraire il doit diminuer la quantité de sous-jacent de son portefeuille, il vendra l'excédent et ajoutera le produit de la vente à l'argent placé déjà présent dans le portefeuille.

En aucun cas ces opérations ne changent la valeur du portefeuille. Ce sont uniquement les changements de valeur des actifs B et S qui font évoluer le prix du portefeuille.

Ainsi *tout se passe comme si* le vendeur liquidait son portefeuille à la fin de l'étape et en reconstituait un autre capable de couvrir l'étape suivante en utilisant uniquement l'argent produit par la liquidation du portefeuille précédent.

Poursuivons l'exemple ci-dessus. On suppose que le prix de l'actif sous-jacent a suivi le parcours *up-down-up :* le trader qui a vendu l'option effectuera les opérations suivantes pour assurer la couverture de l'option :

- À la date initiale $t = 0$ il demandera la prime de 9 € à l'acheteur et il empruntera 55 € : il disposera ainsi de 64 € avec lesquels il achètera $\Delta = 0{,}64$ parts d'actif sous-jacent à 100 € l'unité. Il aura donc en main le portefeuille de couverture $(-55\ , 0{,}64)$.
- À la première étape, une hausse, le prix du sous-jacent est maintenant de 110 €. Le trader liquidera son portefeuille, dont la valeur est maintenant de 15,40 €, et se constituera avec le produit de cette vente le nouveau portefeuille de couverture $(-80{,}63\ , 0{,}8730)$ *i.e.* il empruntera 80,63 € et il achètera avec cette somme 0,8730 parts de sous-jacent au prix spot de 110 €.
- À la deuxième étape, une baisse, le prix du sous-jacent est revenu à 100 €. Le portefeuille vaut maintenant 6,67 €. Il le liquidera à nouveau, afin de se constituer un portefeuille de même prix, mais dont la composition sera $(-66{,}67\ , 0{,}7333)$: un emprunt de 66,67 € et un achat de 0,7333 parts de sous-jacent.
- À la dernière étape, une hausse, le prix du sous-jacent est remonté à 110 €. Le portefeuille vaut maintenant $0{,}7333 \cdot 110 - 66{,}67 = 14$ € (…aux erreurs d'arrondi près). L'option est exercée car le strike $K = 96$ € est inférieur au prix du sous jacent. Le trader doit verser au détenteur du call la différence, soit 14 € : c'est exactement le prix de son portefeuille. Il le liquide et verse le produit de la vente à l'acheteur.

Cette stratégie de couverture est *autofinancée :* après avoir reçu la prime, le trader n'a plus besoin d'ajouter du numéraire pour financer sa stratégie. La revente du portefeuille à chaque étape lui suffit pour reconstituer le portefeuille qui couvrira l'étape suivante.

Cette propriété d'autofinancement est essentielle. Il en va de même de la complétion du marché, c'est-à-dire de la possibilité de répliquer n'importe quel dérivé par un portefeuille (b, Δ). Dans un modèle de marché binomial multi-période la réplication est toujours possible, si toutefois les hypothèses habituelles des marchés sont vérifiées : possibilité de ventes à découvert, d'achat de fractions d'actifs, marché liquide *etc.* Si en outre l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est vérifiée, le prix du portefeuille de réplication est le prix d'arbitrage du dérivé.

3. La formule pour un call.

On reprend la formule (13) ci-dessus avec $f_T = f(T, S_T) = (S_T - K)_+$. On a alors

$$f_t = e^{-r(n-l)\delta t} \sum_{i=0}^{n-l} \binom{n-l}{i} q^i (1-q)^{n-l-i} (S_t u^i d^{n-l-i} - K)_+ \tag{15}$$

où $t = l\delta t$.

Posons $i_0 = \inf\{i | S_t u^i d^{n-l-i} > K\}$. En séparant la somme en deux termes et en écrivant $e^{-r(n-l)\delta t} = e^{-r(T-t)}$, on trouve

$$f_t = S_t \times \sum_{i=i_0}^{n-l} \binom{n-l}{i} \left(que^{-r\delta t}\right)^i \left((1-q)de^{-r\delta t}\right)^{n-l-i} - e^{-r(T-t)} K \times \sum_{i=i_0}^{n-l} \binom{n-l}{i} q^i (1-q)^{n-l-i} \tag{16}$$

Dans l'égalité ci-dessus, la somme contenue dans le deuxième terme du second membre est la probabilité risque-neutre pour que S_T soit supérieur au prix d'exercice K :

$$\sum_{i=i_0}^{n-l} \binom{n-l}{i} q^i (1-q)^{n-l-i} = \mathbf{Q}(S_T > K).$$

C'est donc aussi la probabilité risque-neutre pour que le call soit exerçable.

Par ailleurs, dans la somme du premier terme du membre de droite de l'égalité (16), si on pose $q_S = que^{-r\delta t}$ on a $(1-q)de^{-r\delta t} = 1 - q_S$ en vertu de l'égalité (8) : $q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u-d}$.

Comme $0 < q_S < 1$ on peut interpréter q_S comme une probabilité. En notant $\mathbf{Q}_S$ la mesure de probabilité correspondante, on a

$$\sum_{i=i_0}^{n-l} \binom{n-l}{i} \left(que^{-r\delta t}\right)^i \left((1-q)de^{-r\delta t}\right)^{n-l-i} = \sum_{i=i_0}^{n-l} \binom{n-l}{i} q_S^i (1-q_S)^{n-l-i} = \mathbf{Q}_S(S_T > K).$$

Dans ce cas, l'égalité (16) devient

$$f_t = S_t \mathbf{Q}_S(S_T > K) - e^{-r(T-t)} K \mathbf{Q}(S_T > K). \tag{17}$$

Le sens à donner à la probabilité $\mathbf{Q}_S$ est le suivant : si l'on pose $X_t = B_t/S_t = e^{rt}/S_t$, le prix de l'actif non-risqué *actualisé par le sous-jacent,* alors

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_S}(X_{t+\delta t} \mid X_t) = q_S \frac{e^{r(t+\delta t)}}{uS_t} + (1-q_S) \frac{e^{r(t+\delta t)}}{dS_t} = \frac{e^{rt}}{S_t} = X_t, \tag{18}$$

autrement dit : (X_t) est une martingale pour $\mathbf{Q}_S$ et la filtration associée à S (ou à X).

Ainsi, de même que $\mathbf{Q}$ est la probabilité pour laquelle l'actif risqué actualisé $\widetilde{S} = S/B$ est une martingale, la probabilité $\mathbf{Q}_S$ représente la probabilité pour laquelle l'actif non-risqué actualisé par S, $X = B/S$, est une martingale.

---

1. Un changement de notation.

Le portefeuille de couverture désignera désormais le processus

$$(\psi, \varphi) = \big(\psi_t, \varphi_t\big)_{t=\delta t, 2\delta t, \ldots, T} \quad \text{avec} \quad T = n\delta t$$

où ψ_t représente la *quantité* de bons du Trésor B contenue dans le portefeuille et φ_t représente le delta pour la période $[t-\delta t, t]$, c'est-à-dire une quantité déterminée de parts d'actif risqué S, quantité dont la valeur à la date t est $\varphi_t S_t$ €. La quantité de bons du Trésor présents dans le portefeuille a pour valeur $b = \psi_t B_t$ €. Avec cette nouvelle notation, on a $(b, \Delta) = (\psi_t B_t, \varphi_t)$ et la valeur du portefeuille est $\psi_t B_t + \varphi_t S_t$ à la date t.

On notera que, par convention, l'indice temporel t du couple (ψ, φ) commence à $t = \delta t$ et non à $t = 0$(†) : le portefeuille est construit à la date $t = 0$ pour toute la période $[0, \delta t]$. Le portefeuille $\Pi_{\delta t} = \big(\psi_{\delta t}, \varphi_{\delta t}\big)$ prendra, aux dates $t = 0$ et $t = \delta t$ respectivement, les valeurs :

$$V_0 = \psi_{\delta t} B_0 + \varphi_{\delta t} S_0 \quad \text{puis} \quad V_0^+ = \psi_{\delta t} B_{\delta t} + \varphi_{\delta t} S_{\delta t}. \tag{1}$$

Plus généralement, dans la k-ème période temporelle $[(k-1)\delta t, k\delta t]$, la valeur du portefeuille $\Pi_{k\delta t} = \big(\psi_{k\delta t}, \varphi_{k\delta t}\big)$ évolue de

$$V_{(k-1)\delta t} = \psi_{k\delta t} B_{(k-1)\delta t} + \varphi_{k\delta t} S_{(k-1)\delta t} \quad \text{à} \quad V^+_{(k-1)\delta t} = \psi_{k\delta t} B_{k\delta t} + \varphi_{k\delta t} S_{k\delta t}. \tag{2}$$

La notation indicielle avec les δt alourdit les formules. On utilisera donc le plus souvent la notation X_k pour $X_{k\delta t}$, avec $X = \psi, \varphi, B, S, \Pi, V \ldots$ Dans ce cas, les formules (2) ci-dessus deviennent

$$V_{k-1} = \psi_k B_{k-1} + \varphi_k S_{k-1} \quad \text{et} \quad V^+_{k-1} = \psi_k B_k + \varphi_k S_k \tag{3}$$

où k désigne l'indice d'étape, un entier compris entre 1 et n.

2. L'autofinancement.

Lors de la k-ème étape, c'est-à-dire dans l'intervalle temporel $[(k-1)\delta t, k\delta t]$, les quantités φ et ψ n'ont pas bougé. La valeur du portefeuille est cependant passée de $V_{k-1} = \psi_k B_{k-1} + \varphi_k S_{k-1}$ à $V^+_{k-1} = \psi_k B_k + \varphi_k S_k$; ce changement de valeur est uniquement dû aux variations des prix de B et de S.

Au début de la période suivante, $[k\delta t, (k+1)\delta t]$, le vendeur de l'option modifiera sa position φ sur le sous-jacent en fonction des changements constatés puis adaptera la quantité ψ de non-risqué *en veillant à ne pas modifier la valeur atteinte par le portefeuille* Π_k *à la fin de la période précédente ;* la modification sera effectuée sans apport ni consommation de valeur. Ainsi le nouveau portefeuille $\Pi_{k+1} = \big(\psi_{k+1}, \varphi_{k+1}\big)$ aura comme valeur au début de la $(k+1)$-ème étape, c'est-à-dire à la date $t = k\delta t$:

$$V_k = \psi_{k+1} B_k + \varphi_{k+1} S_k = V^+_{k-1} = \psi_k B_k + \varphi_k S_k. \tag{4}$$

En utilisant les équations (3) et (4) que l'on vient d'obtenir, on trouve que la variation du portefeuille $\Delta_k V = V_k - V_{(k-1)}$ peut s'écrire

$$V_k - V_{k-1} = \psi_k\big(B_k - B_{k-1}\big) + \varphi_k\big(S_k - S_{k-1}\big) \tag{5}$$

ou encore, avec les notations $\Delta_k X = X_k - X_{k-1}$:

$$\Delta_k V = \psi_k\, \Delta_k B + \varphi_k\, \Delta_k S. \tag{6}$$

Cette égalité exprime que, d'une étape à l'autre, la variation du portefeuille ne provient que de la variation des actifs qui le composent. Ainsi, le seul apport éventuel d'argent a lieu lors de la constitution du portefeuille initial. Par la suite, les opérations de réajustement de la couverture sont financées uniquement par la valeur du portefeuille lui-même. On dit alors que ce portefeuille est *autofinancé.*

(†) dans ce contexte de couverture d'un dérivé, "l'étape zéro" serait le versement de la prime f_0 et l'on pourrait poser φ_0=0 et ψ_0=f_0/B_0...

3. Portefeuille d'arbitrage.

On considère un modèle de marché (B, S) binomial multipériode et soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur l'ensemble des trajectoires possibles de prix du sous-jacent S.

On appelle *portefeuille d'arbitrage* un portefeuille autofinancé $\Pi_t = (\psi_t, \varphi_t)_{t=\delta t, 2\delta t, \ldots, T}$ tel que, en notant V_t la valeur de ce portefeuille à la date t, on ait :

– $V_0 = 0$;
– $V_t \geq 0$ pour tout t ;
– $\mathbf{P}(V_t > 0) > 0$ pour un t au moins.

Ainsi, l'investissement initial est nul, le portefeuille est sans risque et il existe une chance réelle que ce portefeuille ait une valeur non-nulle à une date indéterminée $t \in]0, T]$.

4. Autofinancement et martingales.

Reprenons l'égalité (4) en l'actualisant à la date $t = 0$. On divise donc par B_k et on pose $\widetilde{X}_k = X_k/B_k$ où X désigne un processus de prix quelconque. On a évidemment $\widetilde{B}_k = 1$ et l'égalité (5) devient

$$\widetilde{V}_k - \widetilde{V}_{k-1} = \varphi_k\big(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}\big). \tag{7}$$

Ainsi, la variation de la valeur du portefeuille actualisé est entièrement due à la variation du prix actualisé de l'actif risqué.

En additionnant ces dernières égalités pour $k = 1, \ldots, n$, on trouve que la valeur à la date finale $T = n\delta t$ du portefeuille actualisé est

$$\widetilde{V}_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\big(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}\big). \tag{8}$$

Remarquons que le processus (φ_k) est *prévisible :* si l'on note $\mathcal{F}_k$ l'information fournie par la connaissance des prix de l'actif risqué S aux dates $t = 0, \ldots, k\delta t$ (dans le cas markovien, par exemple dans le modèle C-R-R, on peut prendre pour $\mathcal{F}_k$ l'information résultant de la connaissance du prix de S à la date $t = k\delta t$), alors φ_k est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable puisque cette quantité a été déterminée à la date $t = (k-1)\delta t$.

En outre, pour la probabilité risque-neutre, le processus des prix actualisés $\widetilde{S}_k$ est une martingale. On a alors :

Théorème. *Le processus des valeurs actualisées $\widetilde{V}_k$ d'un portefeuille autofinancé V est une $\mathcal{F}$-martingale.*

En effet, on peut écrire

$$\mathbf{E}\big(\widetilde{V}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) = \mathbf{E}\big(\widetilde{V}_k - \widetilde{V}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) + \mathbf{E}\big(\widetilde{V}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\big). \tag{9}$$

Le second terme du membre de droite de l'égalité précédente est égal à $\widetilde{V}_{k-1}$ en raison de sa $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurabilité. On obtient alors

$$\mathbf{E}\big(\widetilde{V}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) = \mathbf{E}\big(\varphi_k\big(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}\big) \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) + \widetilde{V}_{k-1}. \tag{10}$$

En raison de la prévisibilté du processus φ et du fait que S est une $\mathcal{F}$-martingale on obtient finalement

$$\mathbf{E}\big(\widetilde{V}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) = \varphi_k \mathbf{E}\big(\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) + \widetilde{V}_{k-1} = \widetilde{V}_{k-1}. \tag{11}$$

5. Vers le temps continu...

Dans le modèle C-R-R le pas de temps est $\delta t = T/n$ où T désigne la date d'échéance. Si l'on fait tendre n vers l'infini, et si l'on choisit soigneusement les facteurs de variation u et d du sous-jacent S, on peut montrer que le processus des prix du sous-jacent converge vers celui d'un *mouvement brownien géométrique* généralisé. En passant à la limite, l'accroissement $\Delta_k S = \widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}$ sera noté comme une différentielle dS_t. Quant à l'équation (8), elle apparaît dans ce contexte comme une somme de Riemann (ou de Riemann-Stieltjes) dont la limite — en un sens qu'il conviendrait de définir... — pourra être notée comme une intégrale

$$\widetilde{V}_T = V_0 + \int_0^T \varphi_t(\widetilde{S}_t)\, d\widetilde{S}_t. \tag{12}$$

Dans les chapitres suivants nous abordons le temps continu. Nous présentons d'abord le mouvement brownien et l'intégrale stochastique qui forment le cadre de la théorie « standard » de la finance.

On remarquera cependant que pour une approche rapide de l'évaluation des options européennes, et en particulier pour établir les formules de Black-Scholes pour les calls et les puts européens, il n'est pas nécessaire dans un premier temps d'expliciter la notion d'intégrale stochastique. On peut se baser sur une définition intuitive de la différentielle stochastique puis introduire la formule d'Itô, laquelle énonce comment la différentielle stochastique se comporte par changement de variable. En suivant cette remarque nous avons intercalé un chapitre permettant d'accéder rapidement aux formules de Black-Scholes.

1. Définition

On considère un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}\big)$. On décrit le mouvement brownien (ou processus de Wiener) comme un processus temporel, c'est-à-dire comme une famille $(W_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires indexée par le temps $t \in [0, +\infty[$. Ce processus est soumis aux conditions suivantes :

($\imath$) $W_0 = 0$,

($\imath\imath$) les trajectoires $t \mapsto W_t(\omega)$ de W sont continues de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ pour presque tout $\omega \in \Omega$,

($\imath\imath\imath$) pour tout entier positif n, toute suite de réels $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ et toute famille de boréliens de $\mathbf{R}$ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ on a

$$\mathbf{P}(W_{t_1} \in A_1, W_{t_2} \in A_2, \ldots, W_{t_n} \in A_n) =$$
$$\int_{A_1}\int_{A_2}\cdots\int_{A_2} p(t_1; 0, x_1)p(t_2 - t_1; x_1, x_2)\ldots p(t_n - t_{n-1}; x_{n-1}, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n \qquad (1)$$

avec

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\big(-\frac{(y-x)^2}{2t}\big), \qquad (2)$$

aussi appelée « densité de transition. »

On remarquera que la densité (2) ne dépend que de l'écart $y - x$: on a $p(t; x, y) = p(t; 0, y - x)$. Comme fonction de y c'est la densité d'une variable aléatoire normale d'espérance x et de variance t.

En particulier, la variable aléatoire W_t est normale $\mathcal{N}(0, t)$ (variance t).

Ainsi la formule ci-dessus calcule la probabilité pour que la trajectoire de W passe à chaque instant t_i par la partie A_i de $\mathbf{R}$. Le processus W étant fixé, on peut identifier l'espace Ω à l'ensemble des trajectoires de ce processus. Dans ce cas la trajectoire ω désigne l'application $\omega : t \mapsto \omega(t) = W_t(\omega)$.

2. Les accroissements

Théorème 1. *Pour tout* $0 < s < t$ *on a* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0; t - s)$.

Preuve. En effet d'après (1) la densité jointe du couple (W_s, W_t) est $f_{s,t}(x, y) = p(s; 0, x)p(t - s; x, y)$.

Pour tout borélien A de $\mathbf{R}$ on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(W_t - W_s \in A) &= \int_{\{y-x\in A\}} p(s; 0, x)p(t - s; x, y)\, dxdy \\
&= \int_{\mathbf{R}} p(s; 0, x)\Big(\int_{\{y|y-x\in A\}} p(t - s; x, y)\, dy\Big)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} p(s; 0, x)\Big(\int_A p(t - s; x, u + x)\, du\Big)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} p(s; 0, x)\Big(\int_A p(t - s; 0, u)\, du\Big)dx \\
&= \Big(\int_{\mathbf{R}} p(s; 0, x)\, dx\Big)\Big(\int_A p(t - s; 0, u)\, du\Big) \\
&= \int_A p(t - s; 0, u)\, du.
\end{aligned}$$

Cette égalité ayant lieu pour tout A, la variable $W_t - W_s$ a bien pour densité celle d'un variable normale centrée de variance $t - s$.

Corollaire. *Les accroissements du Brownien sont stationnaires.*

Ce qui signifie que la loi des accroissements ne dépend que de l'intervalle temporel $t - s$. Ou encore

$$W_t - W_s \sim W_{t-s} \quad \text{pour } 0 < s < t.$$

Théorème 2. *Pour tout entier positif* n *et toute suite de réels* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, *les accroissements* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *forment un* n*-uple de variables indépendantes.*

Preuve. D'après (1) et (2) la densité du n-uple $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ est

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1\ldots t_n}} \exp\Big(-\frac{x_1^2}{2t_1} - \frac{(x_2-x_1)^2}{2t_2} \cdots - \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2t_n}\Big), \tag{3}$$

et par conséquent ce n-uple est un *vecteur gaussien* centré. Il en est donc de même du n-uple des accroissements $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ qui se déduit du n-uple initial par une transformation linéaire inversible (on pourra consulter par exemple [Stee], § 3.1, pour plus de détails).

Pour prouver l'indépendance il suffit par conséquent de vérifier que toutes les covariances entre les accroissements sont nulles. Par un calcul direct à l'aide des densités on montre que pour tout s, t réels positifs

$$\mathbf{Cov}(W_s, W_t) = s \wedge t, \tag{4}$$

l'inf de s et t. Par conséquent, pour $0 \leq s < t < u$ on a

$$\mathbf{Cov}(W_t - W_s, W_u - W_t) = t \wedge u - s \wedge u - t \wedge t + s \wedge t = t - s - t + s = 0.$$

Une remarque.

Les accroissements ci-dessus correspondent à des intervalles de temps $[t_i, t_{i+1}]$ ayant une extrémité commune. Le résultat est vrai aussi pour des accroissements correspondant à des intervalles temporels disjoints. Par exemple, si $0 \leq s < t < u < v$ le couple d'accroissements $(W_t - W_s, W_v - W_u)$ est indépendant puisque d'après le théorème précédent le triplet $(W_t - W_s, W_u - W_t, W_v - W_u)$ est un triplet indépendant.

Les propriétés précédentes caractérisent entièrement un mouvement brownien :

Théorème 3. *Le processus* $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *est un* processus de Wiener *(sous la probabilité* $\mathbf{P}$*) si et seulement si*

($\imath$) *les trajectoires de* W *sont continues et* $W_0 = 0$,
($\imath\imath$) *pour* $0 \leq s < t$ *l'accroissement* $W_t - W_s$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$,
($\imath\imath\imath$) *pour* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *les accroissements* $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *forment un* n*-uple de variables indépendantes.*

Preuve. On connaît la densité de tout n-uple d'accroissements, c'est le produit des densités de lois normales centrées de variances $t_{i+1} - t_i$. On en déduit la densité de tout n-uple $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ par la formule de changement de variable sous l'intégrale multiple.

3. Caractère markovien du brownien

Jusqu'à présent on a supposé que le brownien démarrait à 0. On peut définir un brownien $W = W^{x_0}$ qui part d'un point x_0 quelconque dans $\mathbf{R}$ en adaptant la caractérisation ci-dessus :

($\imath$) les trajectoires de W^{x_0} sont continues et $W_0^{x_0} = x_0$,
($\imath\imath$) pour $0 \leq s < t$ l'accroissement $W_t^{x_0} - W_s^{x_0}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, t-s)$,
($\imath\imath\imath$) pour $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ les accroissements $W_{t_1}^{x_0}, W_{t_2}^{x_0} - W_{t_1}^{x_0}, \ldots, W_{t_n}^{x_0} - W_{t_{n-1}}^{x_0}$ forment un n-uple de variables indépendantes.

Le processus W^{x_0} est un *brownien affine*. On peut toujours écrire $W^{x_0} = x_0 + W$, où W désigne un *brownien* W *standard*.

Avant d'énoncer le résultat suivant, on donne une définition :

Définition : deux processus X et Y sont dits *indépendants* si, pour des ensembles de dates $t_1, t_2, \ldots, t_m \geq 0$ et $s_1, s_2, \ldots, s_n \geq 0$ quelconques, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_m})$ et $(Y_{s_1}, Y_{s_2}, \ldots, Y_{s_n})$ sont indépendants.

On a alors :

Théorème 4. *(Propriété de Markov)*

Soit W un brownien de départ $x_0 \in \mathbf{R}$. Pour tout $s > 0$ le processus $(W_{t+s} - W_s)_{t\geq 0}$ est lui-même un brownien standard (il démarre à l'origine) et ce processus est indépendant du processus $(W_t)_{0\leq t\leq s}$.

Intuitivement cette propriété signifie que, s étant une date fixée, en ce qui concerne le futur de W pour des dates $t \geq s$, la connaissance des valeurs du processus W sur tout l'intervalle $[0, s]$ ne nous apporte pas plus d'information que la connaissance de W_s, sa valeur à la fin de l'intervalle $[0, s]$.

Plus précisément : le processus W décalé temporellement de s, c'est-à-dire $(W_{s+t})_{t\geq 0}$, a la même distribution que le brownien affine W^x où x est la valeur prise par W_s.

Ainsi, à tout instant s donné, tout se passe comme si le brownien W redémarrait à partir de la valeur prise par W_s.

4. Information

Il s'agit de définir, pour un processus stochastique donné X, «l'information fournie au cours du temps par le développement de ce processus.» L'information disponible à la date t, désignons-la par I_t^X, devra posséder certaines propriétés :

(*i*) I_t^X est composée d'événements associés aux X_s pour tous les $s \leq t$: ces événements sont eux-mêmes composés de trajectoires $s \mapsto X_s(\omega)$, $s \in [0, t]$. L'observation d'une trajectoire particulière dans l'intervalle temporel $[0, t]$ nous permet de décider si l'événement $A \in I_t^X$ a eu lieu ou non ;

(*ii*) l'information est croissante au cours du temps : si $t \leq u$ alors $I_t^X \subset I_u^X$;

(*iii*) en général l'information n'est pas anticipative, *i.e.* l'inclusion $I_t^X \subset I_u^X$, pour $t < u$, est stricte : a priori l'observation des trajectoires de X entre les dates 0 et t ne permet pas de décider de la réalisation de $A \in I_u^X$ si $u > t$.

Les définitions qui suivent formalisent dans un cadre mathématique la notion d'information associée à un processus .

Le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est supposé défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et les variables X_t sont à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Pour t donné, *la tribu $\sigma(X_t)$ associée à X_t* est formée des événements

$$X_t^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) \in B\} \quad \text{avec } B \text{ borélien de } \mathbf{R}.$$

On désigne par $\mathcal{F}_t$ (ou $\mathcal{F}_t^X$ s'il y a un risque d'ambiguité sur le processus) la tribu engendrée par les $\sigma(X_s)$ pour $0 \leq s \leq t$. On la note aussi

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t).$$

C'est la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ contenant les $\sigma(X_s)$ pour les s au plus égaux à t. Ce sera notre modèle pour l'information engendrée par X :

$$I_t^X = \mathcal{F}_t.$$

La collection des $\mathcal{F}_t$ définit une famille croissante $\mathcal{F}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, désignée aussi comme *la filtration associée à X*.

On remarquera que $\mathcal{F}_t$ contient toute l'information produite par X entre les dates 0 et t alors que $\sigma(X_t)$ ne contient que l'information produite par X *à la date t*.

5. Processus adapté à une filtration

Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ est simplement une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit qu'un processus $Y = (Y_t)$ est *adapté à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$* si pour tout t la variable Y_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, *i.e.*

$$Y_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout borélien } B \text{ de } \mathbf{R}$$

(on peut remplacer *borélien* par *intervalle*). Autrement dit, $\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t$.

Ainsi l'information passée (et présente) jusqu'à la date t détermine les valeurs éventuelles de Y_t.

Un processus est toujours adapté à sa filtration associée.

Une remarque sur la mesurabilité en général

Soient $\mathcal{T}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et Y une variable aléatoire. On dit que Y est $\mathcal{T}$-mesurable si $\sigma(Y) \subset \mathcal{T}$ *i.e.* $Y^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ pour tout borélien B de $\mathbf{R}$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles : on dit que Y est X-mesurable si Y est $\sigma(X)$-mesurable *i.e.* si $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$. On peut montrer le résultat suivant :

Théorème 5. *La variable aléatoire Y est X-mesurable si et seulement si il existe une fonction h de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ borélienne telle que $Y = h(X)$.*

6. Espérance conditionnelle

Pour plus de détails on pourra consulter [Will], Part B, Chapter 9.

a. Le cas d'une variable discrète conditionnée par un événement.

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $A \in \mathcal{A}$ un événement donné de probabilité non-nulle. On note $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ la suite des valeurs de X. On suppose que X admet une espérance. L'espérance de X conditionnée par l'événement A est le réel

$$\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{i \geq 1} x_i \mathbf{P}(X = x_i \mid A). \tag{5}$$

On remarque que $\mathbf{E}(X \mid A)\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(X)$.

b. Le cas d'une variable discrète conditionnée par une variable discrète.

On conditionne X par une autre variable discrète Y dont les valeurs sont notées $\{y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots\}$. Pour chaque événement $\{Y = y_j\}$ on peut calculer l'espérance conditionnelle comme en **a** :

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y_j) = \sum_{i \geq 1} x_i \mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j). \tag{6}$$

On obtient ainsi une suite de réels et on attribue de façon naturelle à $\mathbf{E}(X \mid Y = y_j)$ la probabilité $\mathbf{P}(Y = y_j)$, définissant une nouvelle variable aléatoire discrète notée $E(X \mid Y)$.

On vérifie que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) = \mathbf{E}(X)$.

Un exemple : le cas d'une variable indicatrice $Y = \mathbf{1}_A$ où A est un événement de probabilité non-nulle.

On a $\mathbf{E}(X \mid Y = 1) = \sum_{i \geq 1} x_i \mathbf{P}(X = x_i \mid A)$ et $\mathbf{E}(X \mid Y = 0) = \sum_{i \geq 1} x_i \mathbf{P}(X = x_i \mid A^c)$ où A^c désigne l'événement complémentaire de A. L'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X \mid \mathbf{1}_A)$ est donc la variable qui prend les deux valeurs ci-dessus avec les probabilités respectives $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(A^c)$.

On remarque que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathbf{1}_A)) = 1 \times \mathbf{E}(X \mid A)\mathbf{P}(A) + 0 \times \mathbf{E}(X \mid A^c)\mathbf{P}(A^c) = \mathbf{E}(X)$: ce résultat est à rapprocher du cas **a.**

c. Le cas d'un couple de variables à densité.

Soit (X, Y) admettant une densité $f(x, y)$. Les densités marginales f_X et f_Y s'obtiennent par intégration partielle de f :

$$f_X(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y)\, dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y)\, dx \tag{7}$$

et la densité conditionnelle de X sachant Y est :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{\mathbf{R}} f(x, y)\, dx}. \tag{8}$$

L'espérance conditionnelle de X «sachant $Y = y$» (abus de langage car $\{Y = y\}$ est de probabilité nulle…)

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = h(y) \quad \text{avec} \quad h(y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbf{R}} x f(x, y)\, dx \tag{9}$$

permet de donner une expression de l'espérance conditionnelle en fonction de Y :

$$\mathbf{E}(X \mid Y) = h(Y) \quad \text{avec } h(y) \text{ comme en (9).} \tag{10}$$

On vérifie par Fubini que $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid Y)) = \mathbf{E}(h(Y)) = \mathbf{E}(X)$.

d. Le cas général.

Soit X une variable intégrable et $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}$ fait l'objet du Théorème-Définition suivant :

Théorème 6. *Il existe une unique variable Z intégrable et $\mathcal{F}$-mesurable telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$ on ait*

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A X) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A Z) \quad \textit{ou encore} \quad \int_A X \, d\mathbf{P} = \int_A Z \, d\mathbf{P} \tag{11}$$

(Kolmogorov, 1933 ; *voir* [Will], Theorem 9.2.). On note $Z = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})$. L'unicité de l'espérance conditionnelle Z est une unicité presque sûre. Par un argument habituel de la théorie de l'intégration on montre que la condition du théorème précédent équivaut à

$$\mathbf{E}(YX) = \mathbf{E}(YZ) \quad \text{pour toute variable aléatoire } \mathcal{F}\text{-mesurable.} \tag{12}$$

Dans le cas où $\mathcal{F}$ se réduit à la sous-tribu «chaotique»$\{\emptyset, \Omega\}$ (éventuellement complétée par les parties de mesure nulle), on retrouve l'espérance habituelle $\mathbf{E}(X)$. Si à l'inverse $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ on a $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}) = X$.

Lorsque la sous-tribu est la tribu associée à une variable aléatoire, $\mathcal{F} = \sigma(Y)$, on écrit $\mathbf{E}(X \mid Y)$ au lieu de $\mathbf{E}(X \mid \sigma(Y))$. De même, on écrira $\mathbf{E}(X \mid Y_1, \ldots, Y_n)$ pour $\mathbf{E}(X \mid \sigma(Y_1, \ldots, Y_n))$.

Le cas $\mathbf{L}^2$.

Dans le cas d'une variable aléatoire X de carré intégrable, on dispose de l'inégalité de Chebyshev

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))^2\big) \leq \mathbf{E}\big((X-a)^2\big) \quad \text{pour tout réel } a,$$

qui exprime que, au sens des moindres carrés, le scalaire $\mathbf{E}(X)$ est la meilleure approximation de X par une variable aléatoire constante. Ainsi, dans l'espace hilbertien $\mathbf{L}^2$, l'espérance est la projection orthogonale de X sur le sous-espace des constantes.

On a la propriété analogue pour l'espérance conditionnelle :

$$\mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}))^2\big) \leq \mathbf{E}\big((X - \xi)^2\big) \quad \text{pour toute variable } \mathcal{F}\text{-mesurable } \xi. \tag{13}$$

On peut ainsi interpréter l'espérance conditionnelle comme la meilleure approximation, au sens des moindres carrés, de X par une variable $\mathcal{F}$-mesurable, ou encore comme la projection dans $\mathbf{L}^2$ de X sur le sous-espace des variables $\mathcal{F}$-mesurables.

Lorsque $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ ce sous-espace de projection est aussi celui des fonctions $h(Y)$ avec h borélienne.

On remarquera à ce propos que la projection orthogonale de X sur le sous-espace $\{a + bY \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ des fonctions affines de Y est la *régression linéaire* de X en Y.

e. Propriétés de l'espérance conditionnelle.

L'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})$ est une variable aléatoire définie presque sûrement. Autrement dit, si Z et Z' sont deux *versions* de $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})$ alors elles sont égales en dehors d'un ensemble de mesure nulle. En ce sens on peut parler de l'unicité de l'espérance conditionnelle ; toute égalité concernant une espérance conditionnelle est une égalité presque sûre.

- ($\imath$) $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})\big) = \mathbf{E}(X)$.
- ($\imath\imath$) Si X est $\mathcal{F}$-mesurable alors $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}) = X$.
- ($\imath\imath\imath$) L'espérance conditionnelle est une fonctionnelle linéaire et positive.
- ($\imath v$) Les théorèmes classiques de l'intégration s'appliquent à l'espérance conditionnelle : convergence monotone, théorème de Beppo-Levi, lemme de Fatou, convergence dominée.
- (v) Inégalité de Jensen : si g désigne une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$ et convexe et si $\mathbf{E}(|g(X)|) < \infty$ alors
$$\mathbf{E}(g(X) \mid \mathcal{F}) \geq g\big(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F})\big). \tag{14}$$
- ($v\imath$) Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ alors
$$\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}) \mid \mathcal{G}\big) = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}). \tag{15}$$

(*vii*) Si Y est $\mathcal{F}$-mesurable et bornée alors

$$\mathbf{E}(YX \mid \mathcal{F}) = Y\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}) \tag{16}$$

(si Y et X sont dans $\mathbf{L^2}$ on peut se passer de l'hypothèse 'Y bornée').

(*viii*) Si X est indépendante de $\mathcal{F}$ alors

$$\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbf{E}(X)$$

et plus généralement : si $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ indépendante de X et $\mathcal{F}$ alors

$$\mathbf{E}\big(X \mid \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{H})\big) = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}). \tag{17}$$

7. Un exemple : retour sur le caractère markovien du brownien.

On dit qu'un processus X est un *processus de Markov* si pour tous s et t positifs la distribution conditionnelle de X_{t+s} sachant $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$ est identique à la distribution conditionnelle de X_{t+s} sachant X_t (ou $\sigma(X_t)$).

Autrement dit, pour tout réel x on a l'égalité presque sûre

$$\mathbf{P}\big(X_{t+s} \leq x \mid \mathcal{F}_t\big) = \mathbf{P}\big(X_{t+s} \leq x \mid X_t\big). \tag{18}$$

Plus généralement, pour tout borélien A de $\mathbf{R}$, on a

$$\mathbf{P}\big(X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_t\big) = \mathbf{P}\big(X_{t+s} \in A \mid X_t\big) \tag{19}$$

Dans le cas du brownien, cette définition est équivalente à celle qui a été vue au point **3.** :

Théorème. *Le processus de Wiener W est un processus de Markov.*

Preuve. Laissée en exercice au lecteur.

8. La propriété de martingale du brownien.

Soit W un brownien fixé et $\mathcal{F}$ sa filtration associée. Les variables W_t sont intégrables et pour tout s et tout t positifs on a

$$\mathbf{E}\big(W_{t+s} \mid \mathcal{F}_t\big) = \mathbf{E}\big(W_{t+s} - W_t \mid \mathcal{F}_t\big) + \mathbf{E}\big(W_t \mid \mathcal{F}_t\big).$$

Or $\mathbf{E}\big(W_t \mid \mathcal{F}_t\big) = W_t$ car W_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable et $\mathbf{E}\big(W_{t+s} - W_t \mid \mathcal{F}_t\big) = \mathbf{E}\big(W_{t+s} - W_t\big) = 0$ car cet accroissement est indépendant du passé jusqu'à la date t et son espérance est nulle. On a donc

$$\mathbf{E}\big(W_{t+s} \mid \mathcal{F}_t\big) = W_t \tag{20}$$

et par conséquent W est une $\mathcal{F}$-martingale.

Pour plus de détails on pourra consulter [Kle], [Stee], [Eth] ou [Øks].

Si l'on veut accéder directement aux formules de Black-Scholes pour les options européennes, on peut dans un premier temps sauter le chapitre présent.

1. La variation quadratique du brownien.

Soit $T > 0$ réel fixé : on considère une suite de subdivisions $(\pi_n)_{n>0}$ de l'intervalle $[0, T]$ avec $\pi_n = \{t_0^n = 0 < t_1^n < \cdots < t_N^n = T\}$ où $N = N(\pi_n) = N_n$ représente le nombre de sous-intervalles. On suppose que le pas $\delta(\pi_n) = \max_{0\le j\le N-1} |t_{j+1}^n - t_j^n|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On pose

$$S_n = \sum_{j=0}^{N_n-1} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2.$$

On veut montrer que la limite dans $\mathbf{L}^2$ de S_n est égale à T *i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(S_n - T)^2 = 0. \tag{1}$$

On calcule

$$(S_n - T)^2 = \Bigg(\sum_{j=0}^{N_n-1} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - T\Bigg)^2 = \Bigg(\sum_{j=0}^{N_n-1} \Big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big)\Bigg)^2$$

soit

$$\begin{aligned}(S_n - T)^2 = &\sum_{j=0}^{N_n-1} \Big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big)^2 \\ &+ 2 \sum_{j<k, j=0}^{N_n-1} \Big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big)\Big((W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)\Big).\end{aligned}$$

La seconde somme du second membre de l'égalité ci-dessus est d'espérance nulle. En effet, chaque terme de cette somme est le *produit de deux variables aléatoires indépendantes* en raison de l'indépendance des accroissements du brownien sur des intervalles ayant au plus une extrémité commune. L'espérance de chacun de ces produits est donc le produit des espérances.

Or, par stationnarité, $W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n}$ a même loi que $W_{t_{j+1}^n - t_j^n}$ laquelle est normale centrée de variance $t_{j+1}^n - t_j^n$. On a donc, pour tout j

$$\mathbf{E}\big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\big) = 0$$

donc chacun des termes de la seconde somme est nul.

Examinons la première somme $\sum_{j=0}^{N_n-1}\Big((W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\Big)^2$ que l'on peut développer en

$$\sum_{j=0}^{N_n-1} (W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^4 - 2\sum_{j=0}^{N_n-1} (t_{j+1}^n - t_j^n)(W_{t_{j+1}^n} - W_{t_j^n})^2 + \sum_{j=0}^{N_n-1} (t_{j+1}^n - t_j^n)^2$$

L'espérance de la première somme est égale à $3\sum_{j=0}^{N_n-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)^2$ puisque le moment d'ordre 4 d'une variable normale centrée de variance t est $3t^2$. La deuxième somme a pour espérance $2\sum_{j=0}^{N_n-1}(t_{j+1}^n - t_j^n)^2$.

On en conclut que l'espérance de $(S_n - T)^2$ se résume à

$$\mathbf{E}\big((S_n - T)^2\big) = 2 \sum_{j=0}^{N_n-1} (t_{j+1}^n - t_j^n)^2.$$

Or on peut majorer $(t_{j+1}^n - t_j^n)^2$ par $\delta(\pi_n)(t_{j+1}^n - t_j^n)$ où $\delta(\pi_n) = \max_{1\le j\le N}(t_{j+1}^n - t_j^n)$ donc

$$\mathbf{E}\big((S_n - T)^2\big) \le 2\delta(\pi_n) \sum_{j=0}^{N_n-1} (t_{j+1}^n - t_j^n) = 2\delta(\pi_n)T$$

qui tend vers 0 avec $\delta(\pi_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

La limite dans $\mathbf{L}^2$ de S_n est appelée *variation quadratique* du brownien ; elle est égale à T.

2. L'intégrale stochastique des fonctions simples.

On se fixe un brownien W avec sa filtration associée $\mathcal{F}$. On appelle *fonction simple* une variable aléatoire de la forme

$$f = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}[}$$

où a_j désigne une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable et de classe $\mathbf{L}^2$ et où $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N < \infty$ sont des réels positifs donnés. Pour tout $t \ge 0$ on a

$$f(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}[}(t)$$

avec $\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}[}(t) = 1$ si $t_j \le t < t_{j+1}$ et $\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}[}(t) = 0$ sinon. En réalité f est une fonction $f(t,\omega)$ des deux variables $t \in \mathbf{R}_+$ et $\omega \in \Omega$, mais on continuera à écrire $f(t)$ tant qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Ainsi $f(t) = a_j$ si $t_j \le t < t_{j+1}$ et $f(t) = 0$ si $t \ge N$. L'analogie entre les fonctions simples et les fonctions en escalier de la théorie classique de l'intégrale de Riemann se poursuivra au cours de la construction de l'intégrale stochastique.

L'intégrale stochastique de la fonction simple f ci-dessus est par définition

$$I(f) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \tag{2}$$

que l'on note aussi $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\, dW_t$. On remarquera que l'écriture de f n'est pas unique mais que la définition de l'intégrale stochastique ne dépend pas de l'écriture choisie.

Cette intégrale est linéaire sur les fonctions simples : si $f = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}[}$ et $g = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \mathbf{1}_{[s_k,s_{k+1}[}$ sont deux fonctions simples, alors $I(f + \lambda g) = I(f) + \lambda I(g)$ pour tout réel λ. On vérifie cette propriété en commençant pas écrire $f + g$ sur les intervalles déterminés par la réunion des t_j et des s_k.

Pour un $t \ge 0$ fixé on définit l'intégrale stochastique de f sur $[0,t]$ par $I_t(f) = I(f\mathbf{1}_{[0,t]})$ aussi notée $\displaystyle\int_0^t f(s)\, dW_s$. La famille des variables aléatoires $(I_t(f))$ définit un processus $\mathcal{F}$-adapté.

Les deux propriétés suivantes sont fondamentales (preuve laissée au lecteur) :

Théorème.

($\imath$) *Le processus $(I_t(f))$ est une $\mathcal{F}$-martingale :*

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^u f(s)\, dW_s \mid \mathcal{F}_t\Big) = \int_0^t f(s)\, dW_s \quad \textit{pour tout} \quad t \le u. \tag{3}$$

($\imath\imath$) *Isométrie d'Itô :*

$$\mathbf{E}\bigg(\Big(\int_0^t f(s)\, dW_s\Big)^2\bigg) = \mathbf{E}\Big(\int_0^t f(s)^2\, ds\Big) \tag{4}$$

Il résulte du théorème de Fubini que la seconde intégrale de ($\imath\imath$) est aussi égale à $\displaystyle\int_0^t \mathbf{E}\big(f(s)^2\big)\, ds$.

3. Extension de l'intégrale stochastique à l'espace $\mathcal{H}^2$.

On se fixe un réel $T > 0$ et un brownien W avec sa filtration associée $\mathcal{F}$. On considère les fonctions aléatoires (ou processus) $f(t,\omega)$ avec $t \in [0,T]$ et $\omega \in \Omega$. On suppose que f est $\mathcal{B} \times \mathcal{F}_T$-mesurable, où $\mathcal{B}$ désigne la tribu des boréliens de $[0,T]$, et que f est $\mathcal{F}$-adaptée *i.e.* pour tout $t \in [0,T]$ $f(t,.)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On désigne par $\mathcal{H}^2([0,T])$ ou plus brièvement $\mathcal{H}^2$ l'espace des fonctions mesurables et adaptées telles que

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T f^2(t,\omega)\,dt\right) < \infty. \tag{5}$$

C'est un sous-espace fermé de l'espace *complet* $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}_+ \times \Omega)$. On désigne par $\mathcal{H}_0^2$ l'espace des fonctions simples : c'est un sous-espace de $\mathcal{H}^2$ et par un argument classique on peut montrer qu'il est dense dans $\mathcal{H}^2$. Autrement dit, toute fonction $f \in \mathcal{H}^2$ peut être approchée au sens $\mathbf{L}^2$ par une suite de fonctions simples $f_n \in \mathcal{H}_0^2$, n entier positif.

Comme la suite (f_n) est convergente c'est une suite de Cauchy. À l'aide de l'isométrie d'Itô pour les fonctions simples on en déduit que la suite des intégrales $I_T(f_n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}_+ \times \Omega)$ donc elle est convergente. Enfin on vérifie que cette limite ne dépend pas du choix de la suite approchante pour f.

Ce procédé définit l'intégrale stochastique de f sur $[0,T]$. On note $I_T(f)$ ou encore $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dW_t$ cette intégrale. On a encore l'isométrie d'Itô pour l'intégrale stochastique des fonctions de $\mathcal{H}^2$, propriété que l'on déduit par passage à la limite à partir de celle que l'on a démontrée pour les fonctions simples :

Théorème. *Isométrie d'Itô : pour tout processus $f \in \mathcal{H}^2$ on a*

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^T f(t)\,dW_t\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^T f(t)^2\,dt\right) \tag{6}$$

4. L'intégrale stochastique comme processus.

Il ne suffit pas de définir le *processus* $I(f) = (I_t(f))_{t\geq 0}$ en posant $I_t(f) = I_T(\mathbf{1}_{[0,t]}f)$ pour tout $t \in [0,T]$. Pour chaque t cette intégrale n'est en effet définie qu'à un ensemble de mesure nulle près : chaque intégrale est en réalité une *classe* d'intégrales pour l'égalité presque sûre. En choisissant un représentant par classe pour former le processus on réunit en même temps un ensemble *non-dénombrable* de parties de mesure nulle sur lesquelles les intégrales peuvent différer. Or une telle réunion n'est pas de mesure nulle en général, de sorte que l'on pourrait à partir des mêmes classes construire deux processus qui différeraient sur un ensemble de mesure non-nulle. Il en découlerait la non-unicité de l'intégrale stochastique, ce qui la rendrait inutilisable.

Il faut donc être plus précis dans la construction du processus. On peut montrer, en utilisant l'inégalité maximale $\mathbf{L}^2$ de Doob, le résultat suivant :

Théorème. *(Intégrales stochastiques comme processus à trajectoires continues)*

Soit W un brownien fixé : pour $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$ il existe un processus $(I_t(f))$, $t \in [0,T]$, qui est une version continue *du processus $(I_T(\mathbf{1}_{[0,t]}f))_{t\in[0,T]}$, tel que pour tout $t \in [0,T]$ on ait l'égalité presque sûre*

$$I_t(f) = I_T(\mathbf{1}_{[0,t]}f).$$

Autrement dit, presque sûrement les trajectoires de $(I_t(f))_t$ sont continues et pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\mathbf{P}\Big(I_t(f) = I_T(\mathbf{1}_{[0,t]}f)\Big) = 1.$$

On utilisera l'écriture intégrale classique

$$I_t(f) = \int_0^t f(s)\,dW_s$$

et l'isométrie d'Itô est encore vérifiée pour cette intégrale :

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^t f(s)\,dW_s\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t f(s)^2\,ds\right).$$

Pour $0 \le s \le t$ on pose

$$\int_s^t f(u)\,dW_u = \int_0^t \mathbf{1}_{[s,t]} f(u)\,dW_u \tag{7}$$

et l'on a l'égalité presque sûre

$$\int_0^t f(u)\,dW_u = \int_0^s f(u)\,dW_u + \int_s^t f(u)\,dW_u. \tag{8}$$

On vérifie de même les propriétés habituelles de linéarité pour l'intégrale stochastique.

5. L'intégrale stochastique comme martingale continue.

On suppose toujours $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$. On peut montrer, d'abord pour f fonction simple puis, par passage à la limite, pour f quelconque, l'égalité

$$\mathbf{E}\Big(\int_s^t f(u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s\Big) = 0 \quad \text{où } 0 \le s \le t. \tag{9}$$

On a alors, en posant $X_t = \int_0^t f(u)\,dW_u$:

$$\mathbf{E}\Big(X_t \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^t f(u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^s f(u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s\Big).$$

Or l'intégrale stochastique est un processus $\mathcal{F}$-adapté, ce qui signifie que pour tout s l'intégrale $\int_0^s f(u)\,dW_u$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable. On le vérifie d'abord pour les intégrales de fonctions simples, puis pour les processus f quelconques en passant à la limite dans $\mathbf{L}^2$.

Par ailleurs, en raison de l'isométrie d'Itô et de l'hypothèse $f \in \mathcal{H}^2$, l'intégrale stochastique est de carré intégrable, donc intégrable (on est sur un espace de probabilité, donc de mesure totale finie...).

Par conséquent

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^s f(u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_s\Big) = \int_0^s f(u)\,dW_u = X_s$$

et finalement

$$\mathbf{E}\Big(X_t \mid \mathcal{F}_s\Big) = X_s. \tag{10}$$

En conclusion, l'intégrale stochastique d'un processus $f \in \mathcal{H}^2$ est une $\mathcal{F}$-martingale continue.

Remarque. D'après l'égalité (9) ci-dessus on a

$$\mathbf{E}\Big(\int_0^t f(u)\,dW_u\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^t f(u)\,dW_u \mid \mathcal{F}_0\Big) = 0. \tag{11}$$

Par conséquent l'intégrale stochastique est une variable aléatoire centrée. En outre, l'isométrie d'Itô nous permet de calculer la variance de l'intégrale de f :

$$\mathbf{Var}\Big(\int_0^t f(u)\,dW_u\Big) = \mathbf{E}\Big(\int_0^t f(u)^2\,du\Big) = \int_0^t \mathbf{E}\big(f(u)^2\big)\,du. \tag{12}$$

Remarque. La condition $f \in \mathcal{H}^2$ est trop restrictive dans le cadre des applications à la finance. On doit étendre la notion d'intégrale stochastique à des processus plus généraux et les intégrales obtenues ne sont plus nécessairement des martingales, mais seulement des «martingales locales.»

Pour l'instant on supposera toujours que les conditions sont vérifiées pour que l'intégrale soit une martingale.

1. Heuristique des différentielles stochastiques

Pour un accroissement temporel δt et une fonction (un processus déterministe) f on note

$$\delta f(t) = f(t + \delta t) - f(t)$$

l'accroissement de f ; de même, si X est un processus stochastique, son accroissement au cours de la période δt sera la variable aléatoire

$$\delta X_t = X_{t+\delta t} - X_t.$$

Examinons le cas particulier du processus de Wiener $X = W$. Dans ce cas, les accroissements étant stationnaires, δW_t suit la même loi que $W_{\delta t}$ c'est-à-dire la loi normale centrée de variance δt. On a donc les formules suivantes :

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\delta W_t) = 0\\ \mathbf{Var}(\delta W_t) = \delta t\\ \mathbf{E}\big((\delta W_t)^2\big) = \delta t\\ \mathbf{Var}\big((\delta W_t)^2\big) = 2(\delta t)^2\end{gathered}$$

Les deux premières égalités expriment que l'accroissement δW_t est d'ordre de grandeur $\sqrt{\delta t}$ lorsque δt tend vers 0. En effet les chances de trouver une valeur de $|\delta W_t|$ supérieure à quelques écarts-types sont extrêmement faibles.

Les deux dernières égalités indiquent que, si l'on s'arrête à l'ordre un en δt, la variable $(\delta W_t)^2$ est constante égale à son espérance δt. En effet sa variance est de l'ordre de $(\delta t)^2$, négligeable devant δt (une variable aléatoire de variance nulle est constante).

Ces arguments nécessiteraient d'être justifiés pleinement au moyen de la notion d'intégrale stochastique. Nous les accepterons pour l'instant car ils vont nous permettre d'exposer rapidement les règles de base du calcul différentiel stochastique.

Processus d'Itô

Remarquons d'abord que si f est une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans lui-même, son développement de Taylor à l'ordre deux $f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + (1/2)f''(x)(\delta x)^2 + o((\delta x)^2)$ fournit, en prenant $x = W_t$, l'égalité

$$\delta f(W_t) = f(W_t + \delta W_t) - f(W_t) = f'(W_t)\delta W_t + (1/2)f''(W_t)(\delta W_t)^2 + o((\delta W_t)^2)$$

soit, en acceptant les règles de calcul du paragraphe précédent :

$$\delta f(W_t) = f'(W_t)\delta W_t + (1/2)f''(W_t)\delta t + o(\delta t),$$

développement à l'ordre un en δt. On remarque en particulier que, bien que f ne dépende pas explicitement de t, ce développement contient explicitement l'accroissement δt. On est donc amené à étendre les calculs précédents aux fonctions $f = f(t, x)$ et aux processus X dont les accroissements infinitésimaux peuvent s'écrire

$$\delta X_t = \mu_t\, \delta t + \sigma_t\, \delta W_t$$

où μ et σ sont des processus adaptés à W (*i.e.* à sa filtration associée $\{\mathcal{F}_t^W\}$).

On adoptera la notation différentielle habituelle dt, dW_t... à la place des δt, δW_t... et on appellera *processus d'Itô* un processus X dont la dynamique peut s'écrire

$$dX_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t.$$

2. Equations différentielles stochastiques

Définition : *Soit $T > 0$ ou $T = +\infty$ et $x_0 \in \mathbf{R}$ donnés. On appelle* **équation différentielle stochastique (EDS) avec condition initiale** x_0 *une équation du type*

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \quad , \quad X_0 = x_0 \tag{1}$$

où W est un brownien et où $\mu(t, x)$ et $\sigma(t, x)$ sont des fonctions de $[0, T] \times \mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

On montre que, sous certaines conditions de croissance et de continuité uniforme relativement à t de μ et σ, cette équation possède une unique solution X adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}$.

Il est en général impossible de résoudre explicitement une EDS. On peut y arriver dans certains cas importants, en utilisant des changements de variables. On a besoin pour cela de la

Formule d'Itô : *Soit X un processus admettant une différentielle stochastique*

$$dX_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t \tag{2}$$

où μ et σ sont des processus adaptés, avec μ (resp. σ) presque sûrement intégrable (resp. de carré intégrable). Soit aussi $f(t, x)$ une fonction appartenant à $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbf{R})$. Alors

$$Y_t = f(t, X_t)$$

admet aussi une différentielle stochastique et

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, (dX_t)^2 \tag{3}$$

où $(dX_t)^2 = dX_t.dX_t$ est calculé en utilisant les règles suivantes :

$$(dt)^2 = 0 \quad , \quad dt.dW_t = 0 \quad , \quad (dW_t)^2 = dt. \tag{4}$$

En explicitant $(dX_t)^2$ on obtient pour cette formule fondamentale l'énoncé équivalent suivant

$$dY_t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right\} dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dW_t$$

3. Exemples

a. Brownien avec drift : c'est la solution de l'EDS

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \quad , \quad X_0 = x_0 \tag{5}$$

où μ (le *drift*) et σ sont constants, W est un brownien donné et x_0 un réel fixé. On vérifie immédiatement que le processus X tel que

$$X_t = x_0 + \mu t + \sigma W_t \tag{6}$$

est la solution de cette EDS. Ainsi, pour tout t, X_t est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(x_0 + \mu t; \sigma^2 t)$.

b. Brownien géométrique : c'est le modèle du prix de l'actif risqué S dans le modèle de Black et Scholes. Ce processus est solution de l'EDS

$$dS_t = \mu\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t \quad , \quad S_0 = s_0 \tag{7}$$

avec μ et σ constants. En utilisant la formule d'Itô avec $f(t, s) = \log s$ (indépendant de t) on trouve que $Y = \log S$ vérifie

$$dY_t = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\, dt + \sigma\, dW_t \quad , \quad Y_0 = \log s_0 \tag{8}$$

et par conséquent

$$S_t = s_0 \exp\Big(\big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)\, t + \sigma\, W_t \Big). \tag{9}$$

Ainsi, pour tout t, $\log S_t$ est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(\log s_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\, t\, ; \sigma^2 t)$.

4. Mise en garde importante

La formule d'Itô telle qu'elle est énoncée plus haut n'a de sens que si l'on sait définir la différentielle dW du brownien. Or presque sûrement les trajectoires du brownien sont nulle part différentiables. Formellement la notation différentielle n'a pas de sens dans ce contexte.

En réalité, la formule d'Itô n'est pas un énoncé sur les différentielles ; c'est un énoncé sur l'intégrale stochastique et l'écriture ci-dessus de la formule d'Itô doit se comprendre comme une ré-écriture symbolique et souvent commode de la formule intégrale suivante :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \mu_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right\} ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, dW_s. \tag{10}$$

La première intégrale est une intégrale «trajectorielle» classique, la seconde est une intégrale stochastique.

De même, une équation différentielle stochastique telle que $dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t$, $X_0 = x_0$, est en réalité une équation intégrale

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \tag{11}$$

et un processus d'Itô X défini par $dX_t = \mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t$ s'écrira

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dW_s \tag{12}$$

où μ et σ vérifient les conditions de croissance habituelles.

Avec ces écritures intégrales et les propriétés de base de l'intégrale stochastique, on retrouve facilement les solutions des EDS des deux exemples du paragraphe 3 ci-dessus.

---

1. Le modèle de marché de Black-Merton-Scholes

Dans notre modèle de marché (B, S), $B = (B_t)_{t\geq 0}$ et $S = (S_t)_{t\geq 0}$ sont deux processus évoluant avec le temps t.

– Le processus B représente l'actif non-risqué : c'est un processus *déterministe :* sa valeur à la date t (pour un placement de 1€ à la date $t = 0$) est $B_t = e^{rt}$ où r représente le taux d'intérêt de l'argent prêté, supposé à la fois constant et égal au taux de l'argent emprunté.
– Le processus S représente l'actif risqué. C'est un processus aléatoire *(stochastique)* : à chaque instant t, S_t est une variable aléatoire (pour une probabilité sous-jacente $\mathbf{P}$) qui prend comme valeurs les prix que l'actif peut atteindre. Ce processus détermine les événements qui peuvent se produire sur le marché et qui concernent les prix de l'actif lui-même ou de ses dérivés *(options).* La probabilité $\mathbf{P}$ porte sur ces événements : il y a donc un lien très fort entre $\mathbf{P}$, S et les événements observables sur le marché au cours du temps.
– Le prix S_t prend en compte la *tendance* du marché (évolution des prix du type $\mu_t.t$ avec éventuellement $\mu_t = \mu$ constant, le *drift*, ou $\mu_t = \mu S_t$), ainsi que sa variabilité $\sigma_t.W_t$ où W_t est un processus de Wiener *(mouvement brownien)* ; en ce qui concerne le coefficient σ_t, on pourra aussi avoir $\sigma_t = \sigma$ constante *(volatilité)* ou encore $\sigma_t = \sigma S_t$. Le modèle de Black, Merton et Scholes précisera la manière dont l'actif risqué S incorpore ces deux paramètres à son évolution temporelle (modèle du *brownien géométrique*).
– Finalement, le marché sera formé des actifs B et S et de tous les actifs dérivés construits sur S. Le problème qui est posé aux agents du marché est celui de l'évaluation des prix des dérivés *(pricing).* Il est supposé que l'on peut acheter, vendre, emprunter ou prêter des quantités quelconques, éventuellement fractionnaires, de tout produit présent sur le marché ; on peut ainsi vendre un actif que l'on ne possède pas *(vente à découvert* ou *short selling).* Enfin, le marché est supposé posséder la propriété d'*absence d'opportunité d'arbitrage.*

2. L'EDP de Black & Scholes

Soit une option européenne de date d'expiration T et de *pay-off* $f_T(s)$ construite sur l'actif risqué S et dont le prix à la date t est $f(t, S_t)$. Le prix de l'actif risqué est supposé être un brownien géométrique :

$$dS_t = \mu\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t \tag{1}$$

et celui de l'actif non-risqué B est supposé être déterministe et vérifier l'EDO

$$dB = rB_t\, dt \quad , \quad \text{avec } B_0 = 1 \text{ (par exemple)} \tag{2}$$

où r est le rendement de B (par exemple le taux d'intérêt d'un livret d'épargne, supposé constant).

Le trader qui a écrit l'option se constitue un portefeuille $\mathcal{P}$ de couverture qui comporte
— -1 option : il a vendu une option,
— une quantité $\varphi_t = \frac{\partial f}{\partial S}$ d'actif S : il agit selon une stratégie de couverture en "Δ-neutre" de l'option, et sa stratégie opère en temps *continu,*
— une quantité $\psi_t = e^{-rt}(f(t, S_t) - \varphi_t S_t)$ d'actif non-risqué (un emprunt ou un placement selon le signe de la quantité considérée), actualisée au taux r du marché.

En outre, le portefeuille (ψ_t, φ_t) est autofinancé.

À chaque instant t la valeur $\mathcal{P}_t$ du portefeuille qu'il détient est nulle : $\mathcal{P}_t = -f_t + \varphi_t S_t + \psi_t e^{rt} = 0$. On a donc, en utilisant la relation d'autofinancement $d(\varphi_t S_t + \psi_t B_t) = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t$:

$$0 = d\mathcal{P}_t = -df_t + \varphi_t dS_t + \psi_t d(e^{rt}) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\Big)\, dt + r(f_t - \varphi_t S_t)\, dt \tag{3}$$

où l'on a appliqué la formule d'Itô pour calculer df_t. On remarque que le membre de droite ne contient pas de terme aléatoire dW_t.

Ainsi, le prix f_t de l'option est une solution de l'EDP dite "de Black & Scholes"

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\,\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{4}$$

avec la condition au bord

$$f(T, S_T) = f_T(S_T). \tag{5}$$

3. Formule de Feynman-Kač

On suppose que la fonction $F(t,x)$ est solution de l'EDP

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \alpha(t,x)\,\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = rF(t,x) \tag{6}$$

avec la condition au bord

$$F(T,x) = \Phi(x).$$

Alors, s'il existe une solution X de l'EDS

$$dX_t = \alpha(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW'_t, \quad , \quad X_{t_0} = x_0 \tag{7}$$

où W' désigne un brownien standard, on a, sous les hypothèses d'intégrabilité habituelles sur α et σ,

$$F(t_0, x_0) = e^{-r(T-t_0)}\mathbf{E}\big(\Phi(X_T) \mid X_{t_0} = x_0\big). \tag{8}$$

4. Évaluation risque-neutre

L'EDP de Black & Scholes pour le prix $f(t,s)$ à la date t d'une option construite sur un actif risqué S ne contient pas la tendance réelle μ de S ; seuls interviennent le taux d'intérêt r et la volatilité σ. Si on applique alors à cette EDP la formule de Feynman-Kač, avec $\alpha(t,x) = rx$, on trouve, pour le prix de l'option à la date $t \in [0,T]$:

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}\big(\Phi(X_T) \mid X_t = s\big) \tag{9}$$

où s est le prix de l'actif risqué S constaté à la date t et où $\Phi(X_T) = f(T, S_T)$ est le pay-off de l'option. Il faut bien noter que dans cette formule de prix ce n'est pas S qui intervient, mais un processus différent X : le premier est solution de l'EDS

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

le second de l'EDS

$$dX_t = rX_t\,dt + \sigma X_t\,dW'_t$$

où W_t et W'_t sont deux browniens *a priori* distincts.

Le principe de l'évaluation risque-neutre est de remplacer S par X *i.e.* de faire comme si S était un brownien géométrique de drift r au lieu de μ. Or changer le drift d'un brownien, c'est attribuer des probabilités différentes aux trajectoires, autrement dit *c'est changer la probabilité* $\mathbf{P}$ *sous-jacente, celle du «monde réel,» en une probabilité* $\mathbf{Q}$*, la probabilité du «monde risque-neutre.»*

Dans ce contexte, la formule de *pricing* pour une option européenne sur un actif S de valeur s à la date t devient

$$f(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E_Q}\big(f(T,S_T) \mid S_t = s\big) \tag{10}$$

où $\mathbf{E_Q}$ représente l'espérance calculée dans le monde risque-neutre. On notera que cette formule indique en particulier que $\widetilde{f}$ est une martingale pour $\mathbf{Q}$.

Une remarque.
On montre facilement à l'aide de la formule d'Itô (exercice !) que le processus S actualisé :

$$\widetilde{S}_t = S_t/B_t = e^{-rt}S_t$$

est solution de l'EDS

$$d\widetilde{S}_t = (\mu - r)\widetilde{S}_t\,dt + \sigma\widetilde{S}_t\,dW_t.$$

Ainsi $\widetilde{S}_t$ est une $\mathcal{F}_W$-martingale si et seulement si $\mu = r$. Si l'on fait ce calcul sur le processus X on voit que $\widetilde{X}$ est une $\mathcal{F}_{W'}$-martingale (sous la probabilité $\mathbf{Q}$).

5. Formules de Black & Scholes
Soit un actif risqué suivant le modèle du brownien géométrique

$$S_t = S_0 \exp\Big(\big(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\big)\,t + \sigma W_t\Big). \tag{11}$$

Le prix à la date t d'un call européen de strike K et de date d'expiration T, sur un actif valant S_t à la date $t \in [0,T]$, est donné par la formule

$$c(t,S_t) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2) \tag{12}$$

où N désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et avec

$$d_1 = d_1(t,S_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\log\frac{S_t}{K} + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\} \tag{13}$$

et

$$d_2 = d_2(t,S_t) = d_1(t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big\{\log\frac{S_t}{K} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\Big\}. \tag{14}$$

Le prix d'un put de même strike et de même date d'exercice est

$$p(t,S_t) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_t N(-d_1) \tag{15}$$

en raison de la *relation de parité put-call*

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S_t \tag{16}$$

et de l'égalité $N(-u) = 1 - N(u)$.