Estimations d'erreur *a posteriori* pour les méthodes d'éléments finis

E. Creusé - R. Tittarelli
Journées numériques
Nice, 29-30 Novembre 2016

Travaux Pratiques 1 : Estimateurs résiduels, cas 1D.

Code à télécharger : https://math.univ-lille1.fr/~creuse/Nice/Codes_Nice.html

Correction : https://math.univ-lille1.fr/~creuse/Nice/Correction_TP1_Nice.html

1 Prise en main du code numérique

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ de frontière Γ et $f \in L^2(\Omega)$. Le code matlab **main** qui vous a été transmis résout numériquement le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in \Omega, \\ u(a) = 0, & \\ u(b) = 0, & \end{cases}$$

par méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

1) Repérer dans le code les étapes et fonctions caractéristiques du code éléments finis :

   a) La spécification des données théoriques : **a**, **b**, **f** ;

   b) La création des descripteurs et leur signification : **n-noeuds**, **t-noeuds**, **n-mailles**, **t-mailles**;

   c) La matrice du système linéaire **A**, le second membre **B**, le vecteur solution **uh**;

   d) Les gradients des fonctions de base dans l'élément de référence (**DiffBasisFunctions()**), le calcul de la matrice locale de rigidité (**LocalStiffnessMatrix()**), la boucle d'assemblage de la matrice globale de rigidité (étape 3 du programme principal **main**);

   e) Les points et poids pour l'intégration numérique dans l'élément de référence (**integration()**), les fonctions de base dans l'élément de référence (**BasisFunctions()**), le calcul du second membre local (**LocalB()**), la boucle d'assemblage du second membre (étape 4 du programme principal **main**);

   f) L'imposition des conditions aux limites de Dirichlet[1] (étape 5 du programme principal), utilisant en particulier la solution exacte **u** sur la frontière;

[1] Tel que le code est écrit, le traitement des conditions de Dirichlet **non** homogènes est également possible.

g) La résolution du système linéaire et la visualisation de la solution (étape 6 du programme principal);

h) Le calcul des erreurs $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ commises (spécification de la solution exacte **u** et de sa dérivée **dudx**, et fonctions **erreur-L2()** et **erreur-semi-H1()**).

2) On note $h = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$, avec h_T la longueur de la maille T. En utilisant une série de maillages uniformes (**maillage-uni=1**), mettre en évidence les taux de convergence de la méthode pour chacune des deux normes par le tracé de courbes donnant l'évolution de l'erreur en fonction de h, avec[2] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0; \\ b & = & 1; \\ f(x) & = & (((20\pi)^2 - 1)\sin(20\pi x) - 40\pi\cos(20\pi x))e^x. \end{array} \right.$$

3) Même question que la précédente, avec cette fois [3] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0; \\ b & = & 1; \\ f(x) & = & \dfrac{4}{25\, x^{6/5}}. \end{array} \right.$$

Qu'en concluez-vous ?

2 Mise en place de l'estimateur d'erreur résiduel

- Pour toute maille T de la triangulation, on définit l'estimateur d'erreur résiduel η_T par :

$$\eta_T^2 = h_T^2 ||\pi_0(f)||_T^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{x_i \in \partial T \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_i^+) - \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_i^-) \right)^2,$$

avec $x_i^+ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} x_i + \varepsilon$, $x_i^- = \lim_{\varepsilon \to 0^+} x_i - \varepsilon$, et $\pi_0(f)$ l'interpolé $\mathbb{P}_0$ par morceaux de f sur Ω défini dans la maille T par $(f(S_1) + f(S_2))/2$, où S_1 et S_2 sont les deux noeuds du maillage appartenant à T.

- Pour toute maille T de la triangulation, on définit le terme d'approximation ζ_T par :

$$\zeta_T = h_T\, ||\pi_0(f) - f||_T.$$

- On définit respectivement l'estimateur résiduel global et le terme d'approximation global par :

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2; \qquad \zeta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \zeta_T^2.$$

[2]On a clairement dans ce cas $u(x) = \sin(20\pi x)e^x$.

[3]On a clairement dans ce cas $u(x) = x^{4/5}$.

- On adopte enfin les définitions suivantes :

$$\eta^2_{T,V} = h_T^2 ||\pi_0(f)||^2_T; \quad \eta^2_{T,B} = \frac{h_T}{2} \sum_{x_i \in \partial T \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}(x_i^+) - \frac{\partial u_h}{\partial x}(x_i^-) \right)^2;$$

$$\eta^2_V = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta^2_{T,V}; \quad \eta^2_B = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta^2_{T,B}.$$

1) Ecrire les procédures **eta-TV-2** et **zeta-T-2** qui estiment respectivement les valeurs de $\eta^2_{T,V}$ et ζ^2_T pour toute maille T de la triangulation, en choisissant pour le calcul de ζ_T la formule de quadrature de Simpson;

2) Ecrire la procédure **eta-TB-2** qui estime la valeur de $\eta^2_{T,B}$ pour toute maille T de la triangulation. On pourra pour cela utiliser le descripteur **mailles-voisines** déjà disponible dans le code.

3) Ecrire les fonctions **eta-V-2**, **eta-B-2** et **zeta-2** qui estiment les valeurs respectives de η^2_V, η^2_B et ζ^2.

4) En utilisant le programme, on se propose d'étudier la *fiabilité* de l'estimateur, c'est à dire la majoration de l'erreur du type :

$$|u - u_h|^2_{1,\Omega} \lesssim \eta^2 + \zeta^2.$$

   a) Tracer l'évolution du ratio $r^{(1)}_{up}$ en fonction de h, avec

$$r^{(1)}_{up} = \frac{|u - u_h|^2_{1,\Omega}}{\eta^2 + \zeta^2}.$$

   Commenter les résultats observés.

   b) Tracer, pour $2 \leq i \leq 5$, l'évolution des ratios $r^{(i)}_{up}$ en fonction de h, respectivement définis par :

$$r^{(2)}_{up} = \frac{|u - u_h|^2_{1,\Omega}}{\eta^2}; \quad r^{(3)}_{up} = \frac{|u - u_h|^2_{1,\Omega}}{\zeta^2}; \quad r^{(4)}_{up} = \frac{|u - u_h|^2_{1,\Omega}}{\eta^2_V}; \quad r^{(5)}_{up} = \frac{|u - u_h|^2_{1,\Omega}}{\eta^2_B}.$$

   Commenter les résultats observés.

5) En utilisant le programme, on se propose d'étudier l' *efficacité* de l'estimateur, c'est à dire la minoration de l'erreur locale du type[4] :

$$\eta^2_T \lesssim |u - u_h|^2_{1,\omega_T} + \sum_{T' \in \omega_T} \zeta^2_{T'}.$$

Tracer l'évolution du ratio r_{down} en fonction de h, avec $r_{down} = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{\eta^2_T}{|u - u_h|^2_{1,\omega_T} + \sum_{T' \in \omega_T} \zeta^2_{T'}}$.

Commenter les résultats observés.

[4] On rappelle que ω_T est le "patch" associé à la maille T, c'est à dire l'ensemble des mailles partageant au moins un noeud avec T