
Quelques Méthodes Multiniveaux

Par Minjeaud Sebastian

Stage de Master2 réalisé
sous la tutelle de Franck Boyer et Bruno Piar

Table des matières

Introduction	1
1 Un problème modèle, sa discrétisation éléments finis, Quelques rappels utiles	1
1.1 Un problème elliptique [1, p.160-170]	1
1.1.1 Le problème de Dirichlet homogène :	2
1.1.2 Existence, unicité et estimation a priori	2
1.1.3 Régularité des solutions	2
1.2 Une discrétisation éléments finis	2
1.2.1 La triangulation	2
1.2.2 Espaces d'approximation [1, p.75, §3.2.1]	3
1.2.3 Degré de liberté, Opérateur d'interpolation	3
1.2.4 Erreur d'interpolation	4
1.3 Le problème approché et la matrice de rigidité	6
1.4 Conditionnement de la matrice de rigidité	6
2 Présentation de quelques méthodes multiniveaux	9
2.1 Cadre et Notations	9
2.1.1 Le problème elliptique	9
2.1.2 Discrétisation	10
2.1.3 Opérateurs de transfert entre sous-espaces d'approximation	11
2.1.4 Opérateurs de tranfert liés au produit scalaire défini par a	12
2.1.5 Base hiérarchique	12
2.1.6 Quelques relations entre les opérateurs	13
2.2 Méthodes des corrections successives	14
2.2.1 Principe général	14
2.2.2 Quelques méthodes classiques vues sous cet angle	15
2.3 Méthodes des corrections successives liées à des sous-espaces	15
2.3.1 Principe	15
2.3.2 Méthode multiplicative	17
2.3.3 Méthode additive	17
2.4 Méthodes multigrilles	18
2.4.1 Méthodes deux grilles	18
2.4.2 Cycles	18
2.4.3 Méthode Full multigrille (ou itérations multigrille emboîtées)	20
2.5 Préconditionneurs additifs	20
2.5.1 BPX-Bamble Pasciak Xu	20
2.5.2 HB-Base hiérarchique	21
3 Quelques éléments d'analyse	22
3.1 Les méthodes multigrilles-Itérations deux grilles	22
3.1.1 Propriétés d'approximation	22
3.1.2 Propriétés de lissage-Itération de Richardson	23
3.1.3 Estimation en norme L^2	25
3.2 Les méthodes multigrilles-Les cycles	26
3.2.1 La matrice d'itération	26
3.2.2 Convergence en norme L^2	27
3.3 Les préconditionneurs additifs	28
3.3.1 BPX	28
3.3.2 HB	28
4 Quelques résultats numériques : En une dimension	28
4.1 Les cycles multigrilles	29
4.1.1 Propriétés des lisseurs	29
4.1.2 Les étapes du cycle	36
4.1.3 Comportement lorsque le "pas" du maillage diminue	37
4.1.4 Influence des nombres de pré- et post-lissage	37
4.2 Préconditionneurs multiniveaux	39
4.2.1 HB-Base hiérarchique	39

4.2.2	BPX-Bramble Pasciak Xu	39
5	Quelques résultats numériques : En deux dimensions	41
5.1	Les cycles multigrilles	42
5.1.1	Les étapes du cycle	42
5.2	Les méthodes multiniveaux - Comparaison	46
6	Quelques résultats numériques : En trois dimensions	49
6.1	Methodes Multiniveaux - Une comparaison	49
	Conclusion	52

Introduction

Ce mémoire reprend un travail effectué durant mon stage de Master 2 réalisé à l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire). Ce stage a été encadré par Franck Boyer (LATP - Université de Provence) et Bruno Piar (IRSN/SEMIC/LIMSI).

Ce mémoire se divise en cinq chapitres.

Le premier chapitre regroupe quelques rappels sur la méthode des éléments finis. Il permet en particulier de poser clairement le problème : Un système linéaire issu d'une discrétisation éléments finis d'un problème elliptique (symétrique, coercif) a un conditionnement qui augmente comme $\frac{1}{h^2}$ où h représente la taille du maillage. Lorsque l'on raffine le maillage (en vue d'obtenir une meilleure approximation), non seulement le nombre d'inconnues et donc le coût de calcul de chaque itération augmente mais aussi, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision fixée augmente.

Le second chapitre propose une réponse possible à ce problème à travers la présentation de méthodes multinationales. Ces méthodes itératives ont la particularité de converger en un nombre d'itérations indépendant de la taille h du maillage. Après l'introduction de quelques notations et quelques premières remarques, est présenté un cadre général (méthodes des corrections successives) dans lequel rentrent un grand nombre de méthodes itératives. Ensuite, la partie suivante explique comment on construit les méthodes multinationales, met en avant les deux stratégies principales : méthodes multiplicatives et méthodes additives. Les méthodes multigrilles font également l'objet d'une partie dans ce chapitre puisque ce sont les méthodes multinationales les plus utilisées. Elles sont une application récursive d'une méthode deux grilles. Enfin, deux exemples de préconditionneurs additifs sont présentés dans la dernière partie de ce chapitre.

Le troisième chapitre contient quelques éléments mathématiques d'analyse des différentes méthodes présentées dans les paragraphes précédents. La convergence des méthodes multigrilles est montrée dans un cas simple.

Enfin, les deux derniers chapitres présentent les résultats numériques obtenus. Les résultats numériques en une dimension ont été obtenus sur Scilab alors que ceux en deux et trois dimensions ont été obtenus grâce à PELICANS, une plateforme d'outils numériques développés à l'IRSN.

1 Un problème modèle, sa discrétisation éléments finis, Quelques rappels utiles

1.1 Un problème elliptique [1, p.160-170]

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) polygonal.

Considérons l'opérateur différentiel linéaire du second ordre \mathbb{L} défini par :

$$\mathbb{L}w = -\Delta w + \alpha_0 w$$

où α_0 est une constante positive et w une fonction de Ω dans \mathbb{R} .

On pose $V = H_0^1(\Omega)$ et on associe à l'opérateur \mathbb{L} la forme bilinéaire a définie par :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{w} + \alpha_0 \mathbf{v} \mathbf{w})$$

où $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

La forme bilinéaire a est symétrique, continue et coercive sur V .

En effet,

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| &\leq \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2} + \alpha_0 \|\mathbf{v}\|_{L^2} \|\mathbf{w}\|_{L^2} && \text{d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz} \\ &\leq (1 + \alpha_0 C_{\Omega}^2) \|\mathbf{v}\|_{H_0^1} \|\mathbf{w}\|_{H_0^1} && \text{d'après l'inégalité de Poincaré} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &= \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}^2 + \alpha_0 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}^2 && \text{car } \alpha_0 \text{ est positif} \end{aligned}$$

1.1.1 Le problème de Dirichlet homogène :

Soit f une fonction définie sur Ω .

Le problème de Dirichlet homogène s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ tel que : } \quad Lu = f \quad \text{dans } \Omega \\ \quad \quad \quad \quad \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}}$$

La formulation faible de ce problème s'écrit alors, pour $f \in L^2(\Omega)$:

$$\boxed{\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2}} \quad (*)$$

1.1.2 Existence, unicité et estimation a priori

Le théorème de Lax Milgram (Théorème 1) permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution au problème (*) présenté dans les sections précédentes. Il donne également une estimation a priori.

Théorème 1 (Lax-Milgram ; [1, p.133, Th 5.1.1]).

Soit V un espace de Hilbert, $F \in V'$ et a une forme bilinéaire continue et coercive sur V .

Alors, le problème :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = F(v)$$

admet une et une seule solution qui vérifie de plus $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$ où α est la constante de coercivité de a .

Dans notre cas, F est défini par $F(v) = \langle f, v \rangle_{L^2}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|F\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V=1} |F(v)| \\ &= \sup_{\|v\|_V=1} |\langle f, v \rangle_{L^2}| \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |\langle f, v \rangle_{L^2}| &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq C_\Omega \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} \\ &\leq C_\Omega \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème (*) admet une unique solution que nous noterons u . De plus, elle vérifie $\|u\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{L^2}$

1.1.3 Régularité des solutions

Le problème de Dirichlet posé ci-dessus est H^2 -régulier.

Théorème 2 (Régularité des solutions ; [2, p.89]).

Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, l'unique solution u du problème de Dirichlet ci-dessus est dans $H^2(\Omega)$. De plus, il existe une constante C telle que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2}$$

1.2 Une discrétisation éléments finis

1.2.1 La triangulation

Le domaine Ω est polygonal. On considère ici (voir [1, p.74]) une décomposition du type :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

où K est un polyèdre, avec $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$;
 $\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, \overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$;
 Si $\gamma = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ alors γ est une face, coté ou arête commune à K_1 et K_2 ;
 $\forall K \in \mathcal{T}_h, \text{diam}(K) \leq h$

\mathcal{T}_h est appelée une triangulation de $\bar{\Omega}$.

De plus nous supposons l'existence d'un élément de référence \hat{K} , c'est-à-dire que tout élément K de \mathcal{T}_h peut être obtenu à partir de l'élément de référence \hat{K} de la manière suivante : $K = T_K(\hat{K})$ où T_K est une application affine inversible c'est-à-dire $T_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K$ avec B_K linéaire inversible $\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$.

Dans la suite, sont considérés deux cas : l'élément de référence \hat{K} est le d -simplexe unité.
 l'élément de référence \hat{K} est le d -cube unité.

Introduisons maintenant quelques quantités géométriques caractérisant un maillage.

Définition 1 (Quantités géométriques).

Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on note

$$\begin{aligned} h_K &= \text{diam}(K) \\ \rho_K &= \sup\{\text{diam}(S) \mid S \text{ boule contenue dans } K\} \end{aligned}$$

Définition 2 (Famille de triangulations régulière).

Une famille de triangulations \mathcal{T}_h , $h > 0$ est dite régulière si il existe une constante $\sigma \geq 1$ telle que

$$\forall h > 0, \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$$

Définition 3 (Famille de triangulations quasi-uniforme).

Une famille de triangulations \mathcal{T}_h , $h > 0$ est dite quasi-uniforme si elle régulière et si de plus il existe une constante $\tau > 0$ telle que :

$$\forall h > 0, \min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \geq \tau h$$

1.2.2 Espaces d'approximation [1, p.75, §3.2.1]

On désigne par \mathbb{P}_k , $k \geq 0$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k en l'ensemble des variables x_1, \dots, x_d ; et par \mathbb{Q}_k , $k \geq 0$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k en chacune des variables x_1, \dots, x_d .

Par exemple, $(1, x_1, x_2)$ est une base de \mathbb{P}_1 en dimension deux et $(1, x_1, x_2, x_1 x_2)$ est une base de \mathbb{Q}_1 en dimension deux.

Nous pouvons maintenant définir, dans le premier cas, l'espace éléments finis triangulaire :

$$V_h^k = \{v_h \in C^0, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_k\}$$

et, dans le second cas, l'espace éléments finis parallélépipède :

$$V_h^k = \{v_h \in C^0, v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h \circ T_K \in \mathbb{Q}_k\}$$

Dans les deux cas, $V_h^k \subset H_0^1(\Omega)$, [1, p.75, Prop 3.2.1]. On parle d'éléments finis conformes.

Remarque 1 : Dans le cas de maillage parallélépipédique, l'implication $v_h \in V_h^k \implies v_h|_K \in \mathbb{Q}_k$ est en général fausse. Cependant elle est vraie si K est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.

1.2.3 Degré de liberté, Opérateur d'interpolation

Une fonction \mathbb{P}_1 (dans le cas de triangle) ou \mathbb{Q}_1 (dans le cas de rectangle) sur un élément est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend aux sommets de cet élément. On note alors $\Pi_K^1(v)$ l'unique fonction

\mathbb{P}_1 ou \mathbb{Q}_1 prenant les mêmes valeurs que v aux sommets de l'éléments K . On appelle noeuds du maillage les sommets (situés à l'intérieur de Ω) des éléments. Une fonction de V_h est alors entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend aux noeuds du maillage. On note Φ_i la fonction valant 1 au noeud i et 0 à tous les autres noeuds. Pour $v_h \in V_h$, on note $\Pi_h(v) = \sum_i v(n_i)\Phi_i$ où la somme est prise sur tous les noeuds n_i du maillage.

1.2.4 Erreur d'interpolation

Lemme 1 ([3, p.56, preuve du th 2.7.2]; [1, p.86, prop 3.4.1]).

Pour tout $v \in H^m(K)$, $m \geq 0$ posons $\hat{v} = v \circ T_K$.

Alors, $\forall v \in H^m(K)$, on a $\hat{v} \in H^m(\hat{K})$ et il existe une constante $C(m, d)$ telle que

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{H^m(\hat{K})} &\leq C \|B_K\|_2^m |\det B_K|^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{H^m(K)} \\ \text{et} \\ \|v\|_{H^m(K)} &\leq C \|B_K^{-1}\|_2^m |\det B_K|^{\frac{1}{2}} \|\hat{v}\|_{H^m(\hat{K})} \end{aligned}$$

Démonstration :

Comme $C^\infty(K)$ est dense dans $H^m(K)$, il est suffisant de prouver les inégalités ci-dessus pour $v \in C^\infty(K)$.

Soit $v \in C^\infty(K)$,

$$\|\hat{v}\|_{H^m(\hat{K})}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\hat{K}} |\partial^\alpha \hat{v}|^2$$

Avec la règle des dérivations de composées, on obtient, pour la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle,

$$\partial_j(\hat{v} \circ T_K)(\hat{x}) = \sum_{i=1}^d \partial_i v(T_K(\hat{x})) (\partial_j T_K)_i(\hat{x})$$

Notons (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d ; $(B_K)_{ij} = \langle B_K e_j, e_i \rangle_{\mathbb{R}^d}$ et $(b_K)_i = \langle b_K, e_i \rangle_{\mathbb{R}^d}$.

$(B_K)_{ij}$ est alors la représentation matricielle de B_K dans la base canonique et donc,

$$(T_K(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d))_i = \sum_{k=1}^d (B_K)_{ik} \hat{x}_k + (b_K)_i$$

Ce qui donne,

$$(\partial_j T_K(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d))_i = (B_K)_{ij}$$

Ainsi, on obtient la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle,

$$\partial_j(v \circ T_K)(\hat{x}) = \sum_{i=1}^d (B_K)_{ij} \partial_i v(T_K(\hat{x}))$$

Comme, pour tout $i, j \in \{1 \dots d\}$, $|(B_K)_{ij}| \leq \|B_K\|_2$, en calculant les dérivées de la même manière que ci-dessus, on obtient, si α est un multi-indice tel que $|\alpha| = m$:

$$\partial^{\alpha_1, \dots, \alpha_d}(v \circ T_K)(\hat{x}) = \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_m=1}^d (B_K)_{i_1 \bullet} \dots (B_K)_{i_m \bullet} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_m} v(T_K(\hat{x}))$$

et donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha(v \circ T_K)(\hat{x})|^2 &\leq (\|B_K\|_2^m)^2 \left(\sum_{|\beta|=m} \partial^\beta v(T_K(\hat{x})) \right)^2 \\ &\leq (\|B_K\|_2^m)^2 C(m, d) \sum_{|\beta|=m} (\partial^\beta v(T_K(\hat{x})))^2 \end{aligned}$$

où $C(m, d)$ désigne le nombre de d -uplet β tels que $|\beta| = m$.

Donc,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \hat{v}\|_{L^2(\hat{K})}^2 &\leq C(m, d) \|\mathbf{B}_K\|_2^{2m} \sum_{|\beta|=m} \int_{\hat{K}} (\partial^\beta v(\mathbf{T}_K(\hat{\mathbf{x}})))^2 \\ &\leq C(m, d) \|\mathbf{B}_K\|_2^{2m} \sum_{|\beta|=m} \int_K (\partial^\beta v(\mathbf{x}))^2 |\det(\mathbf{B}_K)|^{-1} \\ &\leq C(m, d) \|\mathbf{B}_K\|_2^{2m} |\det(\mathbf{B}_K)|^{-1} \|v\|_{\mathbf{H}^m(K)}^2 \end{aligned}$$

En injectant cette inégalité dans l'égalité de début de preuve, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{\mathbf{H}^m(\hat{K})}^2 &\leq C(m, d) \sum_{|\alpha|=m} \|\mathbf{B}_K\|_2^{2m} |\det(\mathbf{B}_K)|^{-1} \|v\|_{\mathbf{H}^m(K)}^2 \\ &\leq C(m, d)^2 \|\mathbf{B}_K\|_2^{2m} |\det(\mathbf{B}_K)|^{-1} \|v\|_{\mathbf{H}^m(K)}^2 \end{aligned}$$

On en déduit alors la première inégalité.

La deuxième inégalité découle du même calcul effectué en inversant les rôle de K et \hat{K} c'est-à-dire avec $\mathbf{T}_K^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{B}_K^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{B}_K^{-1}\mathbf{b}_K$ ■

Notons $\hat{h} = \text{diam}(\hat{K})$ et $\hat{\rho} = \sup\{\text{diam}(S) | S \text{ boule contenue dans } \hat{K}\}$. Ces deux quantités sont des constantes. Elles ne dépendent que de l'élément de référence et en aucun cas de la taille du maillage.

Lemme 2 ([3, p.55, Lemme 2.7.1] ; [1, p.86, Prop 3.4.2]).

On a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_K\|_2 &\leq \frac{h_K}{\hat{\rho}} \\ \|\mathbf{B}_K^{-1}\|_2 &\leq \frac{\hat{h}}{\rho_K} \end{aligned}$$

Démonstration :

La démonstration découle de l'expression suivante de la norme $\|\bullet\|_2$:

$$\|\mathbf{B}_K\|_2 = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|_2 = \hat{\rho}} \{\|\mathbf{B}_K \xi\|_2\}$$

Soit ξ tel que $\|\xi\|_2 = \hat{\rho}$.

Par définition de $\hat{\rho}$, \hat{K} contient une boule de diamètre $\hat{\rho}$ donc il existe $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ dans \hat{K} tels que $\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} = \xi$.

Ainsi, on a $\mathbf{B}_K \xi = \mathbf{T}_K \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{T}_K \hat{\mathbf{y}}$ et ceci impose $\|\mathbf{B}_K \xi\|_2 \leq h_K$ par définition de h_K puisque $\mathbf{T}_K \hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{T}_K \hat{\mathbf{y}}$ sont dans \mathcal{T} . Ce qui donne la première inégalité, la deuxième est analogue. ■

Les deux lemmes, démontrés ci-dessus, sont les ingrédients essentiels (avec le lemme de Deny-Lions, ci-après) de l'estimation de l'erreur d'interpolation. J'ai choisi de rappeler ici leur démonstration car ils permettent également d'estimer les valeurs propres de la matrice de rigidité et donc son conditionnement.

Lemme 3 (Deny-Lions ; [1, p.88, Prop 3.4.4]).

$\forall l \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(l, d, \hat{K})$ telle que

$$\forall \hat{v} \in \mathbf{H}^{l+1}(\hat{K}), \quad \inf_{\hat{p} \in \mathbb{P}_l} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{\mathbf{H}^{l+1}(\hat{K})} \leq C \|\hat{v}\|_{\mathbf{H}^{l+1}(\hat{K})}$$

Enfin, les deux théorèmes ci-dessous donnent les estimations d'erreur locale et globale que nous utiliserons par la suite dans des cas particuliers.

Théorème 3 (Estimation de l'erreur d'interpolation locale; [1, p. 88, Th 3.4.1]).

Soient $0 \leq m \leq l + 1$, où $l = \min(k, s - 1) \leq 1$.
Alors, il existe une constante C telle que

$$\forall v \in H^s(K), \quad |v - \Pi_K^k(v)|_{H^m(K)} \leq C \frac{h_K^{l+1}}{\rho_K^m} |v|_{H^{l+1}(K)}$$

Théorème 4 (Estimation de l'erreur d'interpolation globale; [1, p. 90, Th 3.4.2]).

Soit \mathcal{T}_h une famille de triangulations régulière.

Soient $m = 0, 1$; $l = \min(k, s - 1) \geq 1$.

Alors, il existe une constante C , indépendante de h telle que

$$\forall v \in H^s(\Omega), \quad |v - \Pi_h^k(v)|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{l+1-m} |v|_{H^{l+1}(\Omega)}$$

En particulier, ce théorème (avec $k = 1$, $m = 1$, $l = 1$, $s = 2$) donne la majoration suivante que nous utiliserons par la suite.

$$\boxed{\forall v \in H^2(\Omega), \quad \|v - \Pi_h^1(v)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch \|v\|_{H^2(\Omega)}}$$

1.3 Le problème approché et la matrice de rigidité

Au lieu de résoudre notre problème dans V , on se contente d'une résolution approchée dans V_h qui est de dimension finie. Ce problème se formule à l'aide de la matrice de rigidité A définie par :

$$A_{ij} = a(\Phi_i, \Phi_j) \text{ pour } i, j = 1 \dots \dim V_h$$

1.4 Conditionnement de la matrice de rigidité

Proposition 1 ([1, p.194, Prop 6.3.1]).

Soit \mathcal{T}_h une famille de triangulations quasi-uniforme de Ω . Alors Il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que pour chaque $v_h \in V_h$ de la forme $v_h = \sum_i \eta_i \Phi_i$,

$$C_1 h^d \|\eta\|_2^2 \leq \|v_h\|_{L^2}^2 \leq C_2 h^d \|\eta\|_2^2$$

Démonstration :

La famille de triangulations étant régulière, le nombre d'éléments contenant chaque noeud est borné (uniformément en h). Notons θ cette borne.

Montrons tout d'abord que pour chaque élément K , il existe deux constante C_1^* et C_2^* telles que :

$$C_1^* h_K^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2 \leq \int_K v_h^2 \leq C_2^* h_K^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2$$

avec M le nombre de degrés de liberté associés à K .

Considérons d'abord l'élément de référence \hat{K} et notons $\hat{v} = v_h \circ T_K$.

Notons, pour chaque $\eta \in \mathbb{R}^M$, $\eta \neq 0$,

$$\psi(\eta) = \frac{\int_{\hat{K}} \hat{v}^2}{\sum_{i=1}^M \eta_i^2}$$

Cette fonction ψ est strictement positive, continue -le numérateur n'est rien d'autre qu'un polynôme en η_1, \dots, η_M - et, de plus, elle est homogène (de degré 0) ie $\psi(t\eta) = \psi(\eta)$ pour tout $t > 0$.

De plus, l'ensemble $\left\{ \eta \in \mathbb{R}^M \text{ tels que } \sum_{i=1}^M \eta_i^2 = 1 \right\}$ est compact. Ainsi, sur cet ensemble, ψ atteint son minimum et son maximum (notés $C_1^{**} > 0$ et $C_2^{**} > 0$). Par homogénéité, on a $\forall \eta \in \mathbb{R}^M$,

$$C_1^{**} \sum_{i=1}^M \eta_i^2 \leq \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 \leq C_2^{**} \sum_{i=1}^M \eta_i^2$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int_K v_h^2 &= \int_K (\hat{v} \circ T_K^{-1})^2 \\ &= \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 |\det B_K| \end{aligned}$$

En choisissant $v_h = 1$, il vient $|\det B_K| = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\hat{K})}$.

On obtient alors : $\frac{1}{\text{mes}(\hat{K})} \rho_K^d \leq |\det B_K| \leq \frac{1}{\text{mes}(\hat{K})} h_K^d$.

Comme la famille de triangulations est régulière, ceci s'écrit encore : $\frac{1}{\sigma^d \text{mes}(\hat{K})} h_K^d \leq |\det B_K| \leq \frac{1}{\text{mes}(\hat{K})} h_K^d$

Ainsi il vient,

$$\frac{1}{\sigma^d \text{mes}(\hat{K})} h_K^d \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 \leq \int_K v_h^2 \leq \frac{1}{\text{mes}(\hat{K})} h_K^d \int_{\hat{K}} \hat{v}^2$$

et donc

$$C_1^* h_K^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2 \leq \int_K v_h^2 \leq C_2^* h_K^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2$$

en notant $C_1^* = \frac{1}{\sigma^d \text{mes}(\hat{K})} C_1^{**}$ et $C_2^* = \frac{1}{\text{mes}(\hat{K})} C_2^{**}$.

Finalement, comme la triangulation est quasi-uniforme, on obtient,

$$\tau^d C_1^* h^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2 \leq \int_K v_h^2 \leq C_2^* h^d \sum_{i=1}^M \eta_i^2$$

Il suffit maintenant de sommer sur tous les éléments K de la triangulation \mathcal{T}_h . Le membre de gauche contient alors au moins un terme correspondant à un degré de liberté donné et, d'après la remarque de début de preuve, le membre de droite contient au plus θ termes correspondants à un degré de liberté donné. Il vient donc,

$$\tau^d C_1^* h^d \|\eta\|_2^2 \leq \int_{\Omega} v_h^2 \leq \theta C_2^* h^d \|\eta\|_2^2$$

D'où la conclusion, avec $C_1 = \tau^d C_1^*$ et $C_2 = \theta C_2^*$. ■

Remarque 2 : Le fait que la triangulation soit quasi uniforme intervient uniquement dans la minoration. Mais celle-ci est indispensable pour obtenir une estimation du conditionnement.

Proposition 2 ([1, p.195 Prop 6.3.2]).

Soit \mathcal{T}_h une famille de triangulations quasi-uniforme de Ω .

Alors, il existe une constante C_3 telle que pour chaque $v_h \in V_h$,

$$\|\nabla v_h\|_{L^2}^2 \leq C_3 h^{-2} \|v_h\|_{L^2}^2$$

Démonstration :

Prouvons tout d'abord, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\int_K |\nabla v_h|^2 \leq C_3^* h_K^{-2} \int_K |v_h|^2$$

Comme dans la preuve précédente, travaillons d'abord sur l'élément de référence \hat{K} et posons cette fois-ci, pour $\eta \neq 0$:

$$\psi^*(\eta) = \frac{\int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2}{\int_{\hat{K}} |\hat{v}|^2}$$

Cette fonction est positive strictement, continue et homogène (de degré zéro). Elle atteint donc son maximum sur le compact $\left\{ \eta \in \mathbb{R}^M \text{ tels que } \sum_{i=1}^M \eta_i^2 = 1 \right\}$. Notons $C > 0$ ce maximum.

Par homogénéité, il vient donc,

$$\int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 \leq C \int_{\hat{K}} |\hat{v}|^2$$

Utilisant les propositions établies dans les sections précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} |\hat{v}|^2 &\leq C^* |\det B_K|^{-1} \int_K |v_h|^2 \\ \int_K |\nabla v_h|^2 &\leq C^* |\det B_K| \|\| B_K^{-1} \|\|_2^2 \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}|^2 \end{aligned}$$

et donc

$$(C^* |\det B_K| \|\| B_K^{-1} \|\|_2^2)^{-1} \int_K |\nabla v_h|^2 \leq C C^* |\det B_K|^{-1} \int_K |v_h|^2$$

ou encore

$$\int_K |\nabla v_h|^2 \leq C (C^*)^2 \|\| B_K^{-1} \|\|_2^2 \int_K |v_h|^2$$

Une proposition établie dans une section précédente donne

$$\|\| B_K^{-1} \|\|_2 \leq \frac{\hat{h}}{\rho_K}$$

En injectant cette inégalité, il vient,

$$\int_K |\nabla v_h|^2 \leq C (C^*)^2 \left(\frac{\hat{h}}{\rho_K} \right)^2 \int_K |v_h|^2$$

La triangulation étant régulière,

$$\int_K |\nabla v_h|^2 \leq C (C^*)^2 \left(\frac{\sigma \hat{h}}{h_K} \right)^2 \int_K |v_h|^2$$

En notant $C_3^* = C (C^*)^2 \sigma^2 \hat{h}^2$, il vient

$$\int_K |\nabla v_h|^2 \leq C_3^* h_K^{-2} \int_K |v_h|^2$$

Enfin, la triangulation étant quasi-uniforme,

$$\int_K |\nabla v_h|^2 \leq C_3^* (\tau h)^{-2} \int_K |v_h|^2$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur tous les éléments K de la triangulation \mathcal{T}_h pour obtenir le résultat avec $C_3 = \frac{C_3^*}{\tau^2}$. ■

Estimons maintenant le conditionnement en norme 2 de la matrice de rigidité [1, p.195-196]. La matrice A est une matrice définie positive. Son conditionnement en norme 2 s'écrit $\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$. De plus les valeurs

propres sont strictement positives et $\lambda_{max} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{(A\eta, \eta)}{\|\eta\|_2^2}$ et $\lambda_{min} = \inf_{\eta \neq 0} \frac{(A\eta, \eta)}{\|\eta\|_2^2}$.

Les deux propositions précédentes permettent d'obtenir une estimation des valeurs propres de A .

Avec les mêmes notations que précédemment,

$$\langle A\eta, \eta \rangle_{\mathbb{R}^d} = a(v_h, v_h)$$

et

$$\begin{aligned} \alpha \|v_h\|_{\mathbb{H}^1}^2 &\leq a(v_h, v_h) \leq M \|v_h\|_{\mathbb{H}^1}^2 && \text{avec } \alpha \text{ et } M \text{ les constantes de coercivité et de continuité} \\ \frac{\alpha}{C_\Omega} \|v_h\|_{L^2}^2 &\leq &\leq C_3 h^{-2} M \|v_h\|_{L^2}^2 && \text{d'après l'inégalité de Poincaré et la proposition précédent} \\ \frac{\alpha}{C_\Omega} C_1 h^d \|\eta\|_2^2 &\leq &\leq C_2 C_3 h^{d-2} M \|\eta\|_2^2 \end{aligned}$$

Donc chaque valeur propre λ de A vérifie l'encadrement :

$$\frac{\alpha}{C_\Omega} C_1 h^d \leq \lambda \leq C_2 C_3 h^{d-2} M$$

En particulier,

$$\text{cond}(A) \leq \frac{M C_2 C_3 C_\Omega}{\alpha C_1} h^{-2} = \mathcal{O}(h^{-2})$$

Cette inégalité montre la difficulté à laquelle on est confronté. Lorsque l'on diminue h , afin d'obtenir plus de précision, non seulement le nombre d'inconnues est plus important mais surtout la difficulté de résolution augmente. Par exemple, si l'on utilise une méthode comme le gradient conjugué, non seulement chaque itération est plus coûteuse puisque le nombre d'inconnues est plus important mais en outre, il faut plus d'itérations pour obtenir la même précision. Dans certains problèmes, ce nombre d'itérations augmente tellement, que l'on n'arrive pas à convergence de la méthode. Les méthodes multiniveaux ont été introduites pour pallier à cette difficulté. Leur taux de convergence est indépendant du "pas" de maillage.

2 Présentation de quelques méthodes multiniveaux

Dans cette section, il s'agit de présenter quelques méthodes multiniveaux pour la résolution de systèmes linéaires provenant de discrétisation éléments finis. Cette présentation nécessite l'introduction de nouvelles notations. Elles sont présentées dans la première sous-section 2.1. Suite à cela, toujours dans la sous-section 2.1 sont présentés quelques liens entre les différents opérateurs introduits ainsi que leur représentation matricielle. La sous-section 2.2 présente la méthode des corrections successives qui est un principe général pour les méthodes itératives. Ce principe est appliqué à des corrections provenant de sous-espaces (d'où le terme de méthodes multiniveaux) dans la sous-section 2.3. Et enfin, les sous-sections 2.4 et 2.5 présentent respectivement les méthodes multigrilles et deux préconditionneurs additifs.

2.1 Cadre et Notations

2.1.1 Le problème elliptique

Le système linéaire que l'on souhaite résoudre provient d'une discrétisation éléments finis d'un problème elliptique sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ que l'on donne sous la forme faible suivante :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V, a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v})$$

où a une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive; l une forme linéaire continue; et V un espace de Hilbert pour un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$.

La forme a définie un produit scalaire sur V équivalent à $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$.

Ce problème peut également se formuler à l'aide d'un opérateur sur V . En effet, le théorème de Riesz sur $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ permet d'obtenir les deux affirmations suivantes :

$$\text{Il existe un unique opérateur noté } A : V \longrightarrow V \text{ tel que } \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V$$

et

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \mathfrak{b} \in V \text{ tel que } \forall \mathfrak{v} \in V, l(\mathfrak{v}) = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{v} \rangle_V}$$

Le problème se réécrit donc

$$\text{Trouver } \mathfrak{u} \in V \text{ tel que } \forall \mathfrak{v} \in V, \langle \mathbb{A}\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle_V = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{v} \rangle_V$$

ou encore

$$\boxed{\text{Trouver } \mathfrak{u} \in V \text{ tel que } \mathbb{A}\mathfrak{u} = \mathfrak{b}.}$$

2.1.2 Discrétisation

Considérons un entier $J \geq 1$ et J triangulations admissibles du domaine Ω sur lequel notre problème elliptique de départ est posé. Notons $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_J$ ces triangulations, de la plus grossière à la plus fine, et supposons par ailleurs que ces triangulations sont emboîtées; elles pourraient par exemple être obtenues par raffinements successifs.

Nous considérons le cas d'une discrétisation par éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_K . Nous notons $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_J$ les ensembles de noeuds associés à chaque triangulation et N_1, \dots, N_J leurs nombres. Enfin, nous noterons n_j^l le noeud numero l de la triangulation \mathcal{T}_j .

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\mathcal{N}_j = \{n_j^l, l = 1 \dots N_j\}$$

Nous pouvons maintenant définir les espaces d'approximation éléments finis V_1, \dots, V_J : Pour $j \in \{1 \dots J\}$, l'espace V_j est l'ensemble des fonctions continues sur Ω et \mathbb{P}_K par morceaux (sur chaque triangle de la triangulation \mathcal{T}_j).

La manière dont les espaces ont été choisis impose $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_J$. De plus nous supposons que

$\forall j \in \{1 \dots J\}, V_j \subset V$ c'est-à-dire que les approximations sont conformes.

Ces espaces sont de dimension finie; ils peuvent donc être munis d'une structure d'espace de Hilbert pour un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_j}$. Par exemple, le produit scalaire sur V induit un produit scalaire sur tous ces espaces.

Ainsi, nous disposons de J espaces d'approximation éléments finis de dimension finie sur chacun desquels nous pouvons formuler un problème approché de la manière suivante ($j \in \{1 \dots J\}$):

$$\boxed{\text{Trouver } \mathfrak{u}_j \in V_j \text{ tel que } \forall \mathfrak{v}_j \in V_j, a(\mathfrak{u}_j, \mathfrak{v}_j) = l(\mathfrak{v}_j)}$$

Ces problèmes approchés peuvent également se réécrire grâce aux opérateurs $\mathbb{A}_j : V_j \rightarrow V_j$ définis par

$$\boxed{\forall \mathfrak{u}_j, \mathfrak{v}_j \in V_j, a(\mathfrak{u}_j, \mathfrak{v}_j) = \langle \mathbb{A}_j \mathfrak{u}_j, \mathfrak{v}_j \rangle_{V_j}}$$

et à $\mathfrak{b}_j \in V_j$ défini par

$$\boxed{\forall \mathfrak{v}_j \in V_j, l(\mathfrak{v}_j) = \langle \mathfrak{b}_j, \mathfrak{v}_j \rangle_{V_j}}$$

de la manière suivante :

$$\boxed{\text{Trouver } \mathfrak{u}_j \in V_j \text{ tel que } \mathbb{A}_j \mathfrak{u}_j = \mathfrak{b}_j.}$$

Pour chaque $j \in \{1 \dots J\}$, il ne reste plus qu'à formuler le problème correspondant dans une base de V_j pour obtenir un système linéaire.

Pour tout $j \in 1 \dots J$, les fonctions $(\Phi_j^l)_{l \in \{1 \dots N_j\}}$ définies ci-après, constituent une base de V_j ; Φ_j^l est l'unique fonction de V_j telle que $\Phi_j^l(n_j^k) = \delta_{kl}$. Attention, dans le cas général, ces fonctions ne constituent pas une base orthogonale de V_j pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_j}$ de V_j .

Le système linéaire utilisé habituellement en élément fini (parce que c'est celui ci qu'on peut calculer) vient de la première formulation. Ainsi, on pose

$$\boxed{\forall k, l \in \{1 \dots N_j\}, (\mathbb{A}_j)_{kl} = a(\Phi_j^l, \Phi_j^k)}$$

$$\forall k \in \{1 \dots N_j\}, (b_j)_k = l(\Phi_j^k).$$

et

$$\forall k \in \{1 \dots N_j\}, (u_j)_k = u_j(n_j^k).$$

Le problème s'écrit alors

$$\text{Trouver } u_j \in \mathbb{R}^{N_j} \text{ tel que } A_j u_j = b_j$$

Remarque 3 : La forme a étant coercive, les matrices A_j , pour $j \in \{1 \dots J\}$, sont définies positives.

Il est important de remarquer que la matrice A_j définie ci-dessus n'est pas la matrice de A_j dans la base $(\Phi_j^l)_{l \in \{1 \dots N_j\}}$.

En effet, si on note \mathcal{A}_j la représentation de A_j dans la base des fonctions de base $(\Phi_j^l)_{l \in \{1 \dots N_j\}}$, on a par

définition $A_j \Phi_j^l = \sum_{t=1}^{N_j} (\mathcal{A}_j)_{tl} \Phi_j^t$. Et par suite,

$$\begin{aligned} (A_j)_{kl} &= a(\Phi_j^l, \Phi_j^k) \\ &= \langle A_j \Phi_j^l, \Phi_j^k \rangle_{V_j} \\ &= \sum_{t=1}^{N_j} (\mathcal{A}_j)_{tl} \langle \Phi_j^t, \Phi_j^k \rangle_{V_j} \\ &= (G_j \mathcal{A}_j)_{kl} \end{aligned}$$

où G_j est la matrice définie par $(G_j)_{kl} = \langle \Phi_j^l, \Phi_j^k \rangle_{V_j}$

C'est-à-dire on vient d'obtenir

$$A_j = G_j \mathcal{A}_j$$

De même pour b_j : la représentation matricielle (notée dans la suite \mathcal{b}) de b_j dans la base $(\Phi_j^l)_{l \in \{1 \dots N_j\}}$ n'est pas b .

En effet,

$$\begin{aligned} (b_j)_k &= l(\Phi_j^k) \\ &= \langle b_j, \Phi_j^k \rangle_{V_j} \\ &= \sum_{l=1}^{N_j} (b_j)_l \langle \Phi_j^l, \Phi_j^k \rangle_{V_j} \\ &= (G_j \mathcal{b}_j)_k \end{aligned}$$

On a donc obtenu :

$$b_j = G_j \mathcal{b}_j$$

2.1.3 Opérateurs de transfert entre sous-espaces d'approximation

Les méthodes explicitées dans la suite cherchent à exploiter la corrélation qui existe entre les différents systèmes linéaires ci-dessus et les liens qui peuvent exister entre les différentes solutions pour $j = 1 \dots J$. Il est donc nécessaire de construire des opérateurs de transfert entre les différents espaces d'approximation $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_J$.

Ces espaces étant emboîtés un choix simple et raisonnable pour le transfert de V_j dans V_{j+1} est l'injection canonique notée \mathbb{I}_j^{j+1} . On parle d'opérateur d'interpolation.

Un choix possible pour le transfert de V_{j+1} dans V_j est la transposée de \mathbb{I}_j^{j+1} pour les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_j}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_{j+1}}$. On parle d'opérateur de projection (ou restriction).

Cet opérateur est donc défini par $\forall u_j \in V_j, \forall u_{j+1} \in V_{j+1}, \langle \mathbb{I}_j^{j+1} u_j, u_{j+1} \rangle_{V_{j+1}} = \langle u_j, {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} u_{j+1} \rangle_{V_j}$.

Remarque 4 : Dans le cas où les deux produits scalaires sur V_j et V_{j+1} sont identiques, ${}^t \mathbb{I}_j^{j+1}$ est la projection orthogonale (pour l'un de ces produits scalaires) de V_{j+1} sur V_j .

La représentation matricielle de \mathbb{I}_j^{j+1} notée \mathbb{I}_j^{j+1} dans les bases $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ pour V_j et $(\Phi_{j+1}^l)_{l \in \{1..N_{j+1}\}}$ pour V_{j+1} s'obtient en évaluant les fonctions de base du niveau j sur les noeuds du niveau $j+1$ c'est-à-dire $\forall k \in \{1, \dots, N_{j+1}\}, \forall l \in \{1, \dots, N_j\}, (\mathbb{I}_j^{j+1})_{kl} = \Phi_j^l(n_{j+1}^k)$.

Par contre, la représentation matricielle de ${}^t\mathbb{I}_j^{j+1}$ notée Π_{j+1}^j dans les bases $(\Phi_{j+1}^l)_{l \in \{1..N_{j+1}\}}$ pour V_{j+1} et $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ pour V_j n'est pas la transposée de \mathbb{I}_j^{j+1} .
En effet, on a par définition

$$\mathbb{I}_j^{j+1}\Phi_j^l = \sum_{t=1}^{N_{j+1}} (\mathbb{I}_j^{j+1})_{tl} \Phi_{j+1}^t \text{ et } {}^t\mathbb{I}_j^{j+1}\Phi_{j+1}^l = \sum_{t=1}^{N_j} (\Pi_{j+1}^j)_{tl} \Phi_j^t$$

donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{I}_j^{j+1}\Phi_j^l, \Phi_{j+1}^k \rangle_{V_{j+1}} &= \sum_{t=1}^{N_{j+1}} (\mathbb{I}_j^{j+1})_{tl} \langle \Phi_{j+1}^t, \Phi_{j+1}^k \rangle_{V_{j+1}} = (G_{j+1}\mathbb{I}_j^{j+1})_{kl} \\ \langle \Phi_j^l, {}^t\mathbb{I}_j^{j+1}\Phi_{j+1}^k \rangle_{V_j} &= \sum_{t=1}^{N_{j+1}} (\Pi_{j+1}^j)_{tk} \langle \Phi_j^l, \Phi_j^t \rangle_{V_j} = (G_j\Pi_{j+1}^j)_{lk} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\Pi_{j+1}^j = G_j^{-1} {}^t\mathbb{I}_j^{j+1} G_{j+1}}$$

Dans la suite, nous noterons, plus généralement, pour $j \leq k \in \{1 \dots J\}$, $\mathbb{I}_j^k = \mathbb{I}_{k-1}^k \mathbb{I}_{k-2}^{k-1} \dots \mathbb{I}_j^{j+1}$ l'injection canonique de V_j dans V_k . Nous noterons également pour $j \in \{1 \dots J-1\}$, $\mathbb{I}_j = \mathbb{I}_j^J$ et $\mathbb{I}_J = \text{Id}_{V_J}$.

La représentation matricielle de \mathbb{I}_j^k dans les bases $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ pour V_j et $(\Phi_k^l)_{l \in \{1..N_k\}}$ pour V_k est évidemment donnée par $\mathbb{I}_j^k = \mathbb{I}_{k-1}^k \mathbb{I}_{k-2}^{k-1} \dots \mathbb{I}_j^{j+1}$ et \mathbb{I}_j^k est la matrice des coordonnées des $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ dans la base $(\Phi_k^l)_{l \in \{1..N_k\}}$ de V_k .

Il est intéressant de remarquer que la représentation matricielle de ${}^t\mathbb{I}_j^k$ avec $(j \leq k \in \{1 \dots J\})$ dans les bases $(\Phi_k^l)_{l \in \{1..N_k\}}$ pour V_k et $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ pour V_j est donnée par $G_j^{-1} {}^t\mathbb{I}_j^k G_k$.

2.1.4 Opérateurs de transfert liés au produit scalaire défini par a

Le produit scalaire défini par a sur V induit un produit scalaire sur chaque V_j . Notons, de manière générale, pour $j \leq k \in \{1 \dots J\}$, $\mathbb{P}_k^j : V_k \rightarrow V_j$ l'adjoint de \mathbb{I}_j^k pour ce produit scalaire. L'opérateur \mathbb{P}_k^j est la projection orthogonale de V_k sur V_j pour le produit scalaire défini par a .

On a en effet par définition

$$\forall \mathbf{u}_j \in V_j, \forall \mathbf{u}_k \in V_k, a(\mathbb{I}_j^k \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k) = a(\mathbf{u}_j, \mathbb{P}_k^j \mathbf{u}_k)$$

On note, pour $j \in \{1 \dots J-1\}$, $\mathbb{P}_j = \mathbb{P}_J^j$.

On a la relation, pour $j \leq k \in \{1 \dots J\}$, $\mathbb{P}_k^j = \mathbb{P}_{j+1}^j \dots \mathbb{P}_{k-1}^{k-2} \mathbb{P}_k^{k-1}$.

2.1.5 Base hiérarchique

Notons, $W_1 = V_1$ et pour $j \in \{2 \dots J-1\}$, $W_j = \text{vect}\{\Phi_j^l, l \text{ tels que } n_j^l \in \mathcal{N}_j \setminus \mathcal{N}_{j-1}\}$. L'ensemble W_j est engendré par les fonctions de base uniquement présentes au niveau j .

On montre facilement que $V_J = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_J$. Cette somme directe n'est pas, en général, orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ de V . La base associée à cette somme directe est appelée base hiérarchique [4, p.167].

On munit W_j d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_j}$. Par exemple, on peut choisir, pour tout $j \in \{1 \dots J\}$, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ de V .

A l'identique de ce qui a été effectué précédemment, on considère les problèmes approchés sur les espaces $(W_j)_{j \in \{1 \dots J\}}$ et on note $(\mathbb{A}_j)_{j \in \{1 \dots J\}}$ les opérateurs définis de la manière suivante :

$$\boxed{\forall \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \in W_j, a(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j) = \langle \mathbb{A}_j \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle_{W_j}}$$

On note également

$$\boxed{\forall k, l \in \mathcal{N}_j \setminus \mathcal{N}_{j-1}, (A_j)_{kl} = a(\Phi_j^l, \Phi_j^k)}$$

Enfin, on notera dans la suite \mathbb{I}_j l'injection canonique de W_j dans V_j et I_j sa représentation dans les bases $(\Phi_j^l)_{l \in \mathcal{N}_j \setminus \mathcal{N}_{j-1}}$ pour W_j et $(\Phi_j^l)_{l \in \mathcal{N}_j}$ pour V_j .

Les remarques sur les représentations matricielles sont encore valables ; les calculs se font à l'identique.

2.1.6 Quelques relations entre les opérateurs

Si les produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_j}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_{j+1}}$ définis sur V_j et V_{j+1} sont identiques alors

$$\boxed{{}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} = \text{Id}_{V_j}}$$

où Id_{V_j} désigne l'identité sur V_j .

Démonstration :

Par définition, pour tout $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \in V_j$ on a

$$\langle {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle_{V_j} = \langle \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{v}_j \rangle_{V_{j+1}}$$

Si les deux produits scalaires sont identiques il vient :

$$\begin{aligned} \langle {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle_{V_j} &= \langle \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{v}_j \rangle_{V_j} \\ &= \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle_{V_j} \end{aligned}$$

■

Attention, là encore cette inégalité n'implique pas d'un point de vue matriciel, l'inégalité (fausse) ${}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} = \text{Id}_{N_j}$ mais l'inégalité $\mathbb{I}_{j+1}^j \mathbb{I}_j^{j+1} = \text{Id}_{N_j}$ c'est-à-dire

$$\boxed{G_j^{-1} {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} G_{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} = \text{Id}_{N_j}}$$

Il existe également une relation entre les opérateurs $\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_{j+1}$ et les opérateurs de transfert.

$$\boxed{\forall j \in \{1 \dots J-1\}, \mathbb{A}_j = {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1}}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \in V_j, \langle {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle_{V_j} &= \langle \mathbb{A}_{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{v}_j \rangle_{V_{j+1}} \\ &= a(\mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{v}_j) \\ &= a(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j) \\ &= \langle \mathbb{A}_j \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle_{V_j} \end{aligned}$$

■

Traduisons cette inégalité en terme matriciel : $G_j^{-1} \mathbb{A}_j = G_j^{-1} {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} G_{j+1} G_{j+1}^{-1} \mathbb{A}_{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1}$ c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{A}_j = {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1} \mathbb{I}_j^{j+1}}$$

Cette inégalité traduit le fait que la matrice obtenue grâce aux opérateurs de transfert à partir de la matrice \mathbb{A}_j et la même que celle directement assemblée sur le niveau grossier.

Les inégalités ci-dessus impliquent les suivantes :

$$\forall j \in \{1 \dots J-1\}, \mathbb{A}_j = {}^t \mathbb{I}_j \mathbb{A}_J \mathbb{I}_j$$

et d'un point de vue matriciel

$$\forall j \in \{1 \dots J-1\}, \mathbb{A}_j = {}^t \mathbb{I}_j \mathbb{A}_J \mathbb{I}_j$$

Enfin, une dernière relation :

$$\forall j \in \{1 \dots J-1\}, \mathbb{A}_j \mathbb{P}_{j+1}^j = {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1}$$

Démonstration :

Ceci peut s'obtenir rapidement à partir des calculs effectués sur les représentations matricielles dans les bases $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ pour V_j et $(\Phi_{j+1}^l)_{l \in \{1..N_{j+1}\}}$ pour V_{j+1} . La représentation du membre de gauche est $(G_j^{-1} \mathbb{A}_j)(\mathbb{A}_j^{-1} {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1})$. En effet, le produit scalaire étant celui défini par a , les matrices de Gram qui interviennent dans la représentation de la transposée sont \mathbb{A}_j et \mathbb{A}_{j+1} . La représentation matricielle du membre de droite est $(G_j^{-1} {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} G_{j+1})(G_{j+1}^{-1} \mathbb{A}_{j+1})$. Les opérateurs sont donc égaux.

On peut également l'obtenir par un calcul direct :

$$\forall \mathbf{u}_{j+1} \in V_{j+1}, \mathbf{u}_j \in V_j,$$

$$\begin{aligned} a(\mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}) &= a(\mathbf{u}_j, \mathbb{P}_{j+1}^j \mathbf{u}_{j+1}) \\ \langle \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbf{u}_j, \mathbb{A}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \rangle_{V_{j+1}} &= \langle \mathbf{u}_j, \mathbb{A}_j \mathbb{P}_{j+1}^j \mathbf{u}_{j+1} \rangle_{V_j} \\ \langle \mathbf{u}_j, {}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \rangle_{V_j} &= \langle \mathbf{u}_j, \mathbb{A}_j \mathbb{P}_{j+1}^j \mathbf{u}_{j+1} \rangle_{V_j} \end{aligned}$$

c'est-à-dire ${}^t \mathbb{I}_j^{j+1} \mathbb{A}_{j+1} = \mathbb{A}_j \mathbb{P}_{j+1}^j$ ■

Plus généralement on obtient, pour $j \leq k \in \{1 \dots J\}$,

$$\mathbb{A}_j \mathbb{P}_k^j = {}^t \mathbb{I}_j^k \mathbb{A}_k$$

Et en particulier, pour tout $j \in \{1 \dots J\}$, $\mathbb{A}_j \mathbb{P}_j = {}^t \mathbb{I}_j \mathbb{A}_J$.

2.2 Méthodes des corrections successives

Le problème que nous nous sommes posés au départ était de résoudre le problème approché $\mathbb{A}_J \mathbf{u} = \mathbf{b}$ sur le niveau fin, c'est-à-dire nous cherchons à "inverser" la matrice $\mathbb{A} = \mathbb{A}_J$.

2.2.1 Principe général

Ce sont des méthodes itératives.

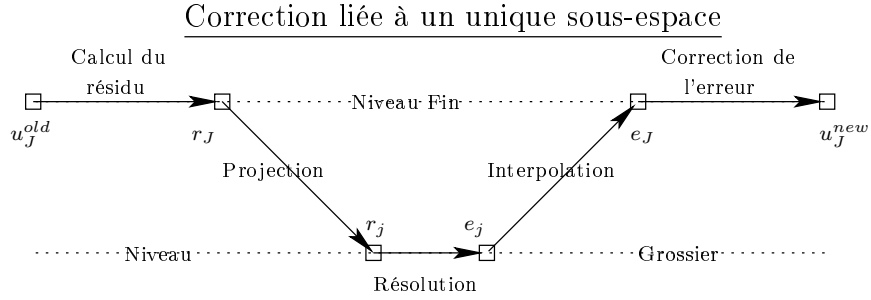
On choisit \mathbf{u}^0 une itérée initiale.

On construit les itérées successives $\mathbf{u}^{old} \rightsquigarrow \mathbf{u}^{new}$ à partir de l'observation suivante :

$$\text{Si } \mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbb{A} \mathbf{u}^{old} \text{ et } \mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{old} \text{ alors } \mathbb{A} \mathbf{e} = \mathbf{r}$$

Ainsi, la structure des algorithmes présentés ci-après [5, p.5] est la suivante :

- On commence par calculer le résidu $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbb{A} \mathbf{u}^{old}$
- L'erreur $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{old}$ est alors solution du système $\mathbb{A} \mathbf{e} = \mathbf{r}$. Résoudre ce système est aussi difficile que résoudre $\mathbb{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$ cependant on peut se contenter d'une résolution approchée et espérer que l'on corrigera l'erreur au fil des itérations.
- ⇒ on calcule $\tilde{\mathbf{e}}$ solution approchée de $\mathbb{A} \mathbf{e} = \mathbf{r}$.
- On pose ensuite $\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{old} + \tilde{\mathbf{e}}$ (correction par l'erreur approchée)



2.2.2 Quelques méthodes classiques vues sous cet angle

- Richardson : $Ae = r$ est remplacé par $\tilde{e} = \omega r$ avec $0 < \omega < \frac{2}{\rho(A)}$ ($\rho(A)$ est le rayon spectral de A).
- Jacobi : $Ae = r$ est remplacé par $D\tilde{e} = r$ avec D la partie diagonale de A .
 $u^{new} = u^{old} + D^{-1} * (b - Au^{old})$
- Gauss Seidel : $Ae = r$ est remplacé par $L\tilde{e} = r$ avec L la partie triangulaire inférieure de A .
 $u^{new} = u^{old} + L^{-1} * (b - Au^{old})$

Ces méthodes consistent donc à résoudre le système $Ae = r$ en remplaçant A par une matrice approchée [5, p.7] facile à inverser.

Elles marchent très mal sur des matrices mal conditionnées.

Cependant les vitesses de convergence [5, p.18-22] sont différentes pour chaque composantes (en fréquence) de l'erreur. La vitesse de convergence des hautes fréquences est très importante alors que celle des basses fréquences est lente. Les hautes fréquences sont bien résolues. A chaque itération, c'est l'erreur qui est lissée et non l'itérée courante.

Dans nos problèmes (issus de discrétisation éléments finis) nous pouvons disposer d'une hiérarchie de maillages. Une idée serait alors d'approcher le système $Ae = r$ en utilisant des grilles plus grossières.

2.3 Méthodes des corrections successives liées à des sous-espaces

2.3.1 Principe

Travaillons d'abord avec un unique sous espace H_j et montrons comment on peut l'utiliser pour corriger l'erreur commise à l'itération courante.

La formulation est faite au niveau des opérateurs. Nous donnerons ensuite une écriture matricielle du procédé.

Pour cela il faut ajouter deux étapes à l'algorithme général de la partie précédent : la première pour passer du niveau fin V_J au niveau grossier H_j et la seconde pour remonter du niveau grossier H_j au niveau fin V_J ; on parlera de projection (ou restriction) et d'interpolation. Il faut également connaître une approximation \mathbb{B}_j de A sur le niveau grossier H_j .

L'algorithme de correction [5, p.29-30] s'écrit de la manière suivante :

u_J	\leftarrow	u^{old}	donné.
r_J	\leftarrow	$b - Au_J$	Calcul du résidu sur le niveau fin V_J .
r_j	\leftarrow	${}^t\mathbb{l}_j r_J$	Projection du résidu sur le niveau grossier H_j .
e_j	\leftarrow	$\mathbb{B}_j^{-1} r_j$	Calcul (approché ou pas) de l'erreur sur le niveau grossier H_j .
e_J	\leftarrow	$\mathbb{l}_j e_j$	Interpolation de l'erreur sur le niveau fin V_J .
u^{new}	$=$	$u_J + e_J$	Correction sur le niveau fin V_J .

Remarque 5 : Nous avons utilisé les notations de la première partie. Cependant, cette méthode reste valable pour n'importe quel sous espace H_j de V_J . L'opérateur \mathbb{l}_j doit alors être l'injection canonique de l'espace choisi H_j dans V_J ; l'opérateur \mathbb{B}_j doit être une approximation de l'opérateur approché A_j sur l'espace choisi H_j . Voir également la remarque suivante ci-dessous.

Cet algorithme peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{old} + \mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1t} \mathbb{I}_j (\mathbf{b} - \mathbb{A} \mathbf{u}^{old})$$

Remarque 6 : La définition de \mathbb{A}_j sur le sous espace choisi H_j nécessite de munir cet espace d'un produit scalaire et l'opérateur est alors dépendant de ce produit scalaire. Par ailleurs, la définition de la transposée repose elle aussi sur le produit scalaire choisi. L'important est que les deux définitions proviennent du même produit scalaire car alors l'opérateur utilisé $\mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1t} \mathbb{I}_j$ ne dépend plus du produit scalaire sur le sous espace H_j mais uniquement du produit scalaire sur V_J .

Cette itération s'interprète en d'autres termes [6, p.292-293] avec l'opérateur de projection \mathbb{P}_j par rapport au produit scalaire défini par a . En effet, un autre moyen de corriger l'erreur commise à l'itération courante est d'ajouter un projeté de cette dernière sur le sous espace H_j . Il faut bien sûr pouvoir calculer ce projeté sans connaître l'erreur. Ceci est possible si on choisit le projeté orthogonal pour le produit scalaire défini par a sur V_J . Ceci donne : $\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{old} + \mathbb{I}_j \mathbb{P}_j (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{old})$. Cependant d'après les calculs effectués en première partie $\mathbb{P}_j = \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j \mathbb{A}_j$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{old}) &= \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j \mathbb{A}_j \mathbf{u} - \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j \mathbb{A}_j \mathbf{u}^{old} \\ &= \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j \mathbf{b} - \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j \mathbb{A}_j \mathbf{u}^{old} \\ &= \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j (\mathbf{b} - \mathbb{A}_j \mathbf{u}^{old}) \end{aligned}$$

et l'itération correspondante est : $\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{old} + \mathbb{I}_j \mathbb{A}_j^{-1t} \mathbb{I}_j (\mathbf{b} - \mathbb{A}_j \mathbf{u}^{old})$.

On obtient bien la même itération que précédemment si on se contente d'une valeur approchée \mathbb{B}_j de l'opérateur \mathbb{A}_j .

En pratique, il faut relier l'itération ci-dessus définie sur les opérateurs à leurs représentations matricielles. Les calculs de la première partie montrent que l'itération matricielle correspondante est :

$$\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{old} + \mathbb{I}_j (G_j^{-1} \mathbb{A}_j)^{-1} (G_j^{-1t} \mathbb{I}_j G_j) ((G_j^{-1} \mathbf{b}_j) - ((G_j^{-1} \mathbb{A}_j) \mathbf{u}^{old}))$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{old} + \mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1t} \mathbb{I}_j (\mathbf{b} - \mathbb{A} \mathbf{u}^{old})$$

où \mathbb{B}_j est une matrice approchée de \mathbb{A}_j .

Les choix classiques pour \mathbb{B}_j sont la partie diagonale de \mathbb{A}_j (choix que l'on avait fait dans la méthode de Jacobi) ou la partie triangulaire inférieure de \mathbb{A}_j (choix que l'on avait fait dans la méthode de Gauss Seidel).

Lorsque l'on dispose de plusieurs sous espaces $(H_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$ (c'est le cas lorsque l'on dispose de plusieurs grilles emboîtées) on peut effectuer les corrections relatives aux sous espaces de différentes façons : en série ou en parallèle. Dans la suite on appelle "correction j " la correction relative au sous-espace H_j .

L'interprétation en terme de projection par rapport au produit scalaire défini sur a montre que la correction (si on considère des corrections exactes c'est-à-dire $\mathbb{B}_j = \mathbb{A}_j$) du niveau j calcule la composante de l'erreur contenue dans H_j (au sens de la décomposition $V_J = H_j \oplus^{\perp a} H_j^{\perp a}$). L'erreur restante après la correction j est contenue dans $H_j^{\perp a}$.

Considérons le cas où les espaces $H_1 \subset \dots \subset H_J$ sont emboîtés (par exemple $H_j = V_j$). L'inclusion $H_1^{\perp a} \supset H_2^{\perp a} \supset \dots \supset H_J^{\perp a} = 0$ montre donc que la correction j si elle est faite de manière exacte ($\mathbb{B}_j = \mathbb{A}_j$) effectuée automatiquement les corrections k avec $k \leq j$. Les corrections peuvent donc avoir un effet redondant. Cet effet redondant peut être utile dans le cas de correction approchée ($\mathbb{B}_j \approx \mathbb{A}_j$).

Le cas à l'extrême opposé du cas d'espaces emboîtés est le cas où les espaces sont en somme directe orthogonale. Dans ce cas, les corrections ne sont pas redondantes, chacune éliminant les composantes (relatives à la somme directe orthogonale) de l'erreur contenues dans l'espace correspondant.

Enfin, si la correction J est effectuée de manière exacte, on trouve bien sûr la solution exacte du problème.

Remarque 7 : Prenons, par exemple, pour $j \in \{1 \dots N_j\}$, $H_j = \text{vect}\{\Phi_j^j\}$. Dans ce cas, \mathbb{I}_j , la représentation matricielle de l'injection canonique de H_j dans V_J et \mathbb{A}_j est très simple.

$$\mathbb{I}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Ligne } j \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_j = a(\Phi_j^j, \Phi_j^j) = [(\mathbb{A}_j)_{jj}]$$

La correction obtenue est donc la suivante :

$$u^{new} = \begin{bmatrix} u_1^{old} \\ \vdots \\ (u^{old})_{j-1} \\ (u^{old})_j + \frac{(b - Au^{old})_j}{A_{jj}} \\ (u^{old})_{j+1} \\ \vdots \\ (u^{old})_{N_j} \end{bmatrix}$$

Ceci représente la correction par rapport au niveau j . On voit dans les parties suivantes que selon la stratégie choisie, multiplicative ou additive, on obtient, pour cet exemple, respectivement la méthode de Gauss-Seidel ou celle de Jacobi.

2.3.2 Méthode multiplicative

La méthode multiplicative [6, p.293-294] consiste à effectuer les corrections sur tous les niveaux successivement. Ainsi, le calcul de chaque correction prend en compte les corrections précédents :

```

v = uold
Pour j = 1 ... J
    v ← v + IjBj-1tj(b - Av)
Fin Pour
unew = v
    
```

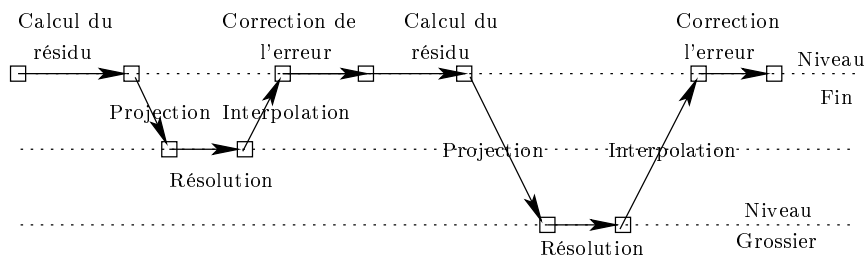
La version matricielle s'écrit :

```

v = uold
Pour j = 1 ... J
    v ← v + IjBj-1tj(b - Av)
Fin Pour
unew = v
    
```

Remarque 8 : L'exemple ci-dessus donne alors exactement la méthode de Gauss-Seidel.

Corrections Stratégie Multiplicative



2.3.3 Méthode additive

La méthode additive [6, p.297] consiste à calculer les corrections sur les différents niveaux en parallèle à partir de l'itérée courante. On ajoute ensuite l'ensemble des corrections obtenues à l'itérée courante. Chaque correction est donc calculée indépendamment des autres.

```

v = uold
Pour j = 1 ... J
    v ← v + IjBj-1tj(b - Auold)
Fin Pour
unew = v
    
```

Cet algorithme peut se résumer de la manière suivante :

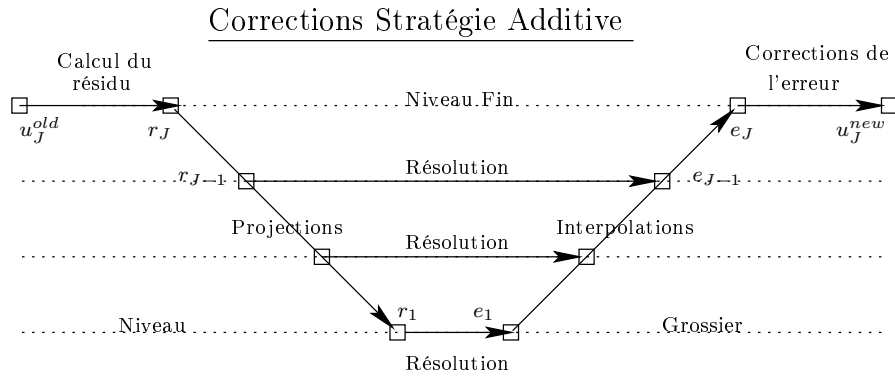
$$u^{new} = u^{old} + \left(\sum_{j=1}^J I_j B_j^{-1} t_j \right) (b - Au^{old})$$

Il se formule également de manière matricielle par :

$$u^{new} = u^{old} + \left(\sum_{j=1}^J I_j B_j^{-1} I_j \right) (b - Au^{old})$$

L'effet redondant des corrections peut être gênant ici puisque les différentes corrections sont calculées sur la même itérée. Ainsi, certaines composantes de l'erreur peuvent être prises en compte plusieurs fois.

Remarque 9 : L'exemple ci-dessus donne alors exactement la méthode de Jacobi.



2.4 Méthodes multigrilles

2.4.1 Méthodes deux grilles

Il est possible de combiner les méthodes de corrections successives liées à des sous espaces avec les méthodes classiques qui ont un pouvoir lissant sur l'erreur. Les points faibles de chaque méthode sont ainsi compensés. Pour cela, si ν est un entier, notons $S^\nu(u, A, b)$, le résultat obtenu après ν itérations (à partir de l'itéré u) d'une méthode lissante pour le système $Au = b$. Choisissons deux entiers positifs ν_1 et ν_2 .

L'algorithme suivant combine les méthodes classiques qui lissent l'erreur et la correction sur un sous espace plus grossier.

u_J	$\leftarrow u^{old}$	donné.
u_J	$\leftarrow S^{\nu_1}(u_J, A, b)$	Pré-lissage.
r_J	$\leftarrow b - Au_J$	Calcul du résidu sur le niveau fin V_J .
r_j	$\leftarrow t_j r_J$	Projection du résidu sur le niveau grossier V_j .
e_j	$\leftarrow B_j^{-1} r_j$	Calcul (approché ou pas) de l'erreur sur le niveau grossier V_j .
e_J	$\leftarrow I_j e_j$	Interpolation de l'erreur sur le niveau fin V_J .
u_J	$\leftarrow u_J + e_J$	Correction sur le niveau fin V_J .
u^{new}	$= S^{\nu_2}(u_J, A, b)$	Post-lissage.

Plusieurs choses restent à préciser :

- Le choix de l'itérée initiale u_0 .
- Le choix du lisseur S et des nombres d'itérations ν_1 et ν_2 .
- Comment résoudre de manière efficace le problème moins couteux $A_j e_j = r_j$

2.4.2 Cycles

Lorsque l'on dispose de plusieurs grilles, la résolution du système $A_j e_j = r_j$ peut se faire de manière approchée avec une méthode deux grilles utilisant une grille plus grossière. Ceci définit donc un algorithme récursif.

L'algorithme suivant $MG(j, u^{old}, f_j)$ effectue une correction de l'erreur commise avec l'itérée u^{old} en vue de résoudre le système $A_j u_j = f_j$.

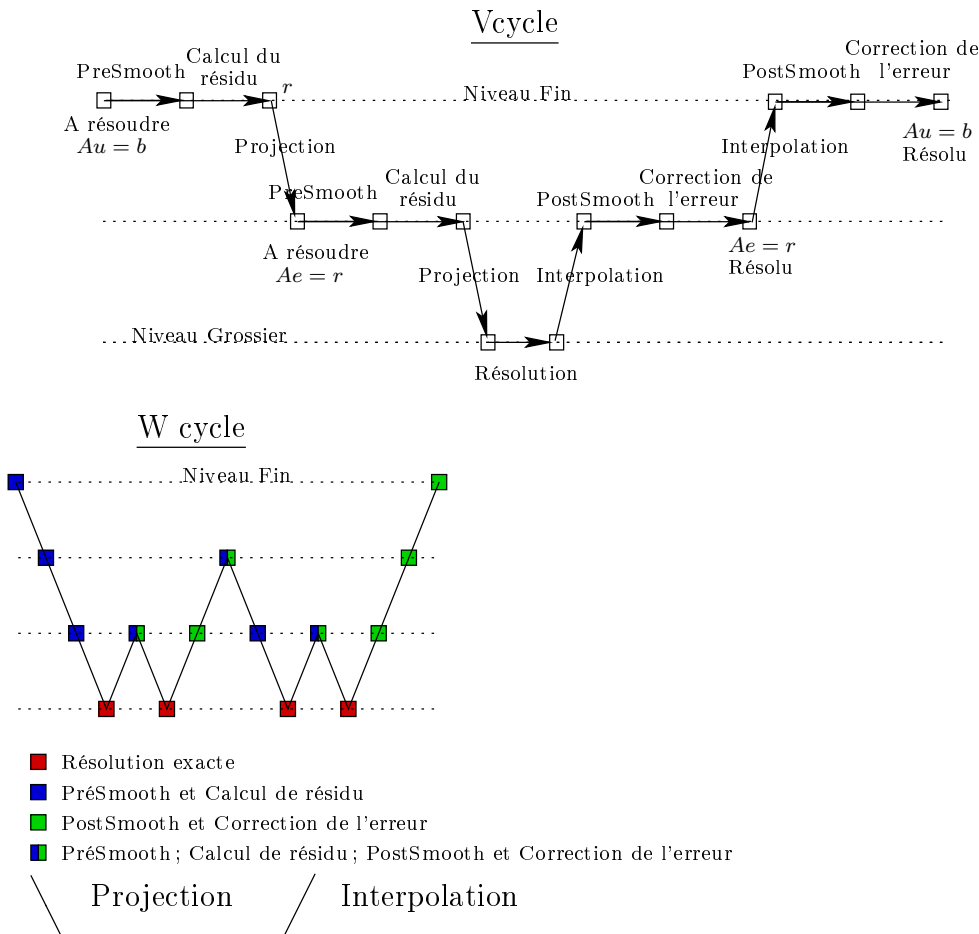
$MG(j, u^{old}, f_j)$ est défini récursivement de la manière suivante :

Si $j = 1$, $MG(1, u^{old}, f_1) = A_1^{-1}f_1$	Résolution exacte sur le niveau le plus grossier.
Sinon	
$u_j \leftarrow u^{old}$	Pré-lissage sur le niveau fin.
$u_j \leftarrow S^{\nu_1}(u_j, A_j, f_j)$	Calcul du résidu sur le niveau fin.
$r_j \leftarrow f_j - A_j u_j$	Projection du résidu du niveau fin sur le niveau grossier.
$r_{j-1} \leftarrow I_{j-1}^j r_j$	Calcul approché de l'erreur sur le niveau grossier V_{j-1}
$e_{j-1} \leftarrow 0$	
Faire ν fois : $e_j \leftarrow MG(j-1, e_{j-1}, r_{j-1})$	Interpolation de l'erreur du niveau grossier sur le niveau fin.
$e_j \leftarrow I_{j-1}^j e_{j-1}$	Correction sur le niveau fin.
$u_j \leftarrow u_j + e_j$	Post-lissage sur le niveau fin.
$u_j \leftarrow S^{\nu_2}(u_j, A_j, f_j)$	
$u^{new} \leftarrow u_j$	
$MG(j, u^{old}, f_j) = u^{new}$	

La résolution du système $A_j u_j = b_j$ s'effectue alors de la manière suivante :

$u_j^0 = 0$	Itérée initiale donnée.
Pour $n \geq 0$, $u_j^{n+1} = MG(J, u_j^n, b_j)$	Itérations successives.

La méthode multigrille ci-dessus est appelée V-cycle si $\nu = 1$ et W-cycle si $\nu = 2$.



Il me semble que la méthode multigrille ne s'interprète ni en terme de méthode multiplicative, ni en terme de méthode additive. En effet, la correction apportée provient d'un seul niveau, il n'y a donc pas de notion de calcul de correction en série ou en parallèle. Une seule correction est calculée mais ce calcul met à contribution l'ensemble des niveaux plus grossier.

Prenons l'exemple d'un V-cycle dans lequel nous supprimons les étapes de pré- et post-lissage. La correction qu'il effectue s'écrit :

$$u^{new} = u^{old} + I_1 A_0^{-1} I_1$$

2.4.3 Méthode Full multigrille (ou itérations multigrille emboîtées)

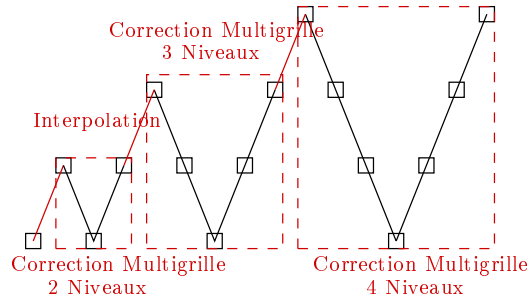
Dans l'algorithme précédent l'itérée initiale est $u_j^0 = 0$. Cependant on pourrait utiliser nos grilles grossières pour déduire une valeur de l'itérée initiale u_j^0 plus proche de la solution exacte. Pour cela, il faut disposer d'une approximation b_j du second membre sur chaque niveau $j \in \{1 \dots J\}$.

L'algorithme suivant exploite cette idée :

$u_j^{0,1} \leftarrow A_1^{-1} b_1$	Résolution exacte sur le niveau le plus grossier.
Pour $j = 2$ jusqu'à J	Boucle de remontée des niveaux.
$u_j^{0,j} \leftarrow I_j^{j+1} u_j^{0,j-1}$	Interpolation sur un niveau plus fin j .
Faire ν fois : $u_k \leftarrow MG(j, u_j, b_j)$	ν corrections multigrilles sur le niveau plus fin j .
Fin Pour	

Cet algorithme rapide donne une estimation $u_j^{0,J}$ de la solution de $A_j u_j = b_j$ qu'il est possible d'exploiter comme itérée initiale dans un algorithme itératif comme la méthode multigrille.

FullMultigrille



2.5 Préconditionneurs additifs

Il s'agit d'appliquer une méthode additive de corrections successives liées à des sous espaces en tant que pré-conditionneur. Les deux exemples classiques de tels preconditionneurs sont BPX (Bamble Pasciak Xu) [7] et HB (Base Hiérarchique). Ce sont les espaces sur lesquels on effectue les corrections qui diffèrent : dans le cas de BPX, ces espaces sont les espaces $(V_j)_{j=\{1 \dots J\}}$ alors que dans le cas de HB, ces espaces sont les espaces $(W_j)_{j=\{1 \dots J\}}$.

2.5.1 BPX-Bamble Pasciak Xu

BPX correspond à une méthode additive de corrections successives liées aux sous-espaces $(V_j)_{j=\{1 \dots J\}}$. Il s'écrit (se reporter à la section 2.3 avec $H_j = V_j$)

$$\mathbb{P}_{\text{BPX}} = \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1} \mathbb{I}_j$$

où les opérateurs \mathbb{I}_j (définis en première partie) représentent l'injection canonique de V_j dans V_J ; l'opérateur \mathbb{B}_j est un opérateur approché de A_j ; et la transposée est prise pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_j}$.

Cet opérateur \mathbb{P}_{BPX} est un preconditionneur pour l'opérateur A c'est-à-dire que $\text{cond}(\mathbb{P}_{\text{BPX}} A) \leq \text{cond}(A)$. Pour obtenir, l'expression matricielle d'un preconditionneur pour A cherchons l'expression matricielle de l'opérateur $\mathbb{P}_{\text{BPX}} A$ dans la base $(\Phi_l^t)_{l \in \{1 \dots N_J\}}$.

On obtient :

$$\left(\sum_{j=1}^J \mathbb{I}_j (G_j^{-1} B_j)^{-1} (G_j^{-1} \mathbb{I}_j G_j) \right) (G_J^{-1} A)$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{j=1}^J \mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1t} \mathbb{I}_j \right) \mathbb{A}$$

Matriciellement l'expression à retenir est donc :

$$\mathbb{P}_{\text{BPX}} = \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1t} \mathbb{I}_j$$

où la matrice \mathbb{I}_j est la représentation de la base $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ dans la base $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ de V_J le niveau le plus fin; la matrice \mathbb{B}_j est une approximation de la matrice \mathbb{A}_j (par exemple sa partie diagonale pour une approximation de type Jacobi ou sa partie triangulaire inférieure pour une approximation de type Gauss Seidel); la transposée est la transposée matricielle classique.

Cette matrice \mathbb{P}_{BPX} est un préconditionneur pour la matrice \mathbb{A} . Elle n'est pas la représentation dans la base $(\Phi_j^l)_{l \in \{1..N_j\}}$ de l'opérateur \mathbb{P}_{BPX} .

Il est important de remarquer que chaque terme des sommes ci-dessus est indépendant des autres. Les calculs peuvent donc être effectués dans n'importe quel ordre ou en même temps.

Cependant, lorsque l'on ne dispose uniquement des opérateurs de transfert $(\mathbb{I}_j^{j+1})_{j=\{1..J-1\}}$, il est nécessaire d'effectuer les projections et les interpolations en série. On obtient alors [8, p.180], sous forme matricielle, pour l'évaluation de \mathbb{P}_{BPX} l'algorithme suivant :

$v_J \leftarrow v$ Pour $j = J - 1$ jusqu'à 1 $v_j \leftarrow \mathbb{I}_j^{j+1} v_{j+1}$ Projection sur les niveaux grossier à effectuer en série. Fin Pour Pour $j = 1$ jusqu'à J $v_j \leftarrow \mathbb{B}_j^{-1} v_j$ Résolution approchée sur le niveau j . Fin Pour $w \leftarrow v_1$ Pour $j = 1$ jusqu'à $J - 1$ $w \leftarrow v_{j+1} + \mathbb{I}_j^{j+1} w$ Remontées au niveau fin à effectuer en série Fin Pour
--

On trouve également, dans [7, p.2], [8, p.174], l'expression suivante du préconditionneur BPX :

$$\mathbb{B}_v = \sum_{j=1}^J h_j^{2-d} \sum_{l=1}^{N_j} (v, \Phi_j^l) \Phi_j^l$$

où d représente la dimension du domaine Ω .

Cette expression est identique à celle mentionnée ci-dessus, si l'on considère que $\mathbb{B}_j = h_j^{d-2} * \text{Id}_{N_j}$. Ceci correspond à un facteur près à la diagonale de \mathbb{A}_j correspondant à la discrétisation du laplacien sur un maillage régulier.

2.5.2 HB-Base hiérarchique

HB correspond à une méthode additive de corrections successives liées aux sous-espaces $(W_j)_{j=\{1..J\}}$. Il s'écrit (se reporter à la section 2.3 avec $H_j = W_j$)

$$\mathbb{P}_{\text{HB}} = \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_j \mathbb{B}_j^{-1t} \mathbb{I}_j$$

où les opérateurs \mathbb{I}_j (définis en première partie) représentent l'injection canonique de W_j dans V_J ; l'opérateur \mathbb{B}_j est alors un opérateur approché de \mathbb{A}_j ; et la transposée est prise pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_j}$.

De même que précédemment, l'expression matricielle à retenir est :

$$P_{\text{HB}} = \sum_{j=1}^J I_j B_j^{-1t} I_j$$

où la matrice I_j est la représentation de la base $(\Phi_j^l)_{l \in \mathcal{N}_j \setminus \mathcal{N}_{j-1}}$ dans la base $(\Phi_J^l)_{l \in \{1..N_J\}}$ de V_J le niveau le plus fin; la matrice B_j est une approximation de la matrice A_j (par exemple sa partie diagonale pour une approximation de type Jacobi ou sa partie triangulaire inférieure pour une approximation de type Gauss Seidel); la transposée est la transposée matricielle classique.

Cette matrice P_{HB} est un préconditionneur pour la matrice A .

On remarque que l'opérateur \mathbb{B}_j va de W_j dans W_j , il "opère uniquement sur les fonctions de bases présentes exclusivement au niveau j ".

3 Quelques éléments d'analyse

3.1 Les méthodes multigrilles-Itérations deux grilles

3.1.1 Propriétés d'approximation

Théorème 5.

Soit $\mathbf{v}_l \in V_l$ et $\mathbf{v}_{l-1} \in V_{l-1}$ tels que $\forall \mathbf{w} \in V_{l-1}, a(\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{w}) = 0$.

Alors,

$$\|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} \leq \frac{MC}{\alpha} h_{l-1} \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2}$$

$$\|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{L^2} \leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2}$$

avec M la constante de continuité de a ; α la constante de coercivité de a et C la constante provenant de l'inégalité de H^2 -régularité des solutions.

Démonstration :

Soit $\mathbf{v}_l \in V_l$ et $\mathbf{v}_{l-1} \in V_{l-1}$ tels que $\forall \mathbf{w} \in V_{l-1}, a(\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{w}) = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 &\leq a(\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}) && \text{grâce à la coercivité de } a \\ &= a(\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{v}_l) && \text{d'après l'hypothèse ci-dessus} \\ &= \langle \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathbb{A}_l \mathbf{v}_l \rangle_{L^2} && \text{par définition de } \mathbb{A}_l \\ &\leq \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{L^2} \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2} && \text{d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz} \end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'astuce d'Aubin-Nitsche pour obtenir :

$$\|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{L^2} \leq MCh_{l-1} \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} \quad (*)$$

où M est la constante de continuité de a et C la constante provenant de l'inégalité de H^2 -régularité des solutions. Pour cela, intéressons nous au problème : Trouver $\mathfrak{g}^{(l)} \in V$ tel que

$$\forall \mathfrak{v} \in V, a(\mathfrak{g}^{(l)}, \mathfrak{v}) = \langle \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathfrak{v} \rangle_{L^2}$$

Il admet une unique solution.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1} \rangle_{L^2} &= a(\mathfrak{g}^{(l)}, \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}) && \text{par définition de } \mathfrak{g}^{(l)} \\ &= a(\mathfrak{g}^{(l)} - \Pi_{V_{l-1}} \mathfrak{g}^{(l)}, \mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}) && \text{car } \Pi_{V_{l-1}} \mathfrak{g}^{(l)} \in V_{l-1} \\ &\leq M \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} \|\mathfrak{g}^{(l)} - \Pi_{V_{l-1}} \mathfrak{g}^{(l)}\|_{\mathbb{H}_0^1} && \text{avec } M \text{ la constante de continuité.} \\ &\leq M \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} h_{l-1} \|\mathfrak{g}^{(l)}\|_{\mathbb{H}^2} && \text{grâce à la majoration de l'erreur d'interpolation.} \\ &\leq M \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} h_{l-1} C \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{L^2} && \text{grâce à l'inégalité de régularité des solutions.} \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'inégalité (*). Reprenons maintenant notre preuve. En utilisant une première fois l'inégalité (*), il vient :

$$\alpha \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \leq (MC) h_{l-1} \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1}^2 \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2}$$

c'est-à-dire, en divisant chaque membre de l'inégalité par $\|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1}$:

$$\|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} \leq \frac{MC}{\alpha} h_{l-1} \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2}$$

Pour obtenir la deuxième inégalité du théorème à partir de la première ci-dessus, on utilise une deuxième fois l'inégalité (*) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{L^2} &\leq MC h_{l-1} \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{\mathbb{H}_0^1} \\ &\leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2} \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.

Pour tout $\mathbb{f}_l \in V_l$,

$$\|(\mathbb{A}_l^{-1} - \mathbb{l}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{l}_{l-1}^t) \mathbb{f}_l\|_{L^2} \leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \|\mathbb{f}_l\|_{L^2}$$

Démonstration :

Soit $\mathbb{f}_l \in V_l$, posons $\mathbf{v}_l = \mathbb{A}_l^{-1} \mathbb{f}_l \in V_l$ et $\mathbf{v}_{l-1} = \mathbb{l}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{l}_{l-1}^t \mathbb{f}_l \in V_{l-1}$ puisque \mathbb{l}_{l-1}^l représente l'injection canonique $V_{l-1} \hookrightarrow V_l$.

On a alors, pour tout $\mathbf{w} \in V_{l-1}$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}_{l-1} \mathbf{v}_{l-1} \rangle_{L^2} && \text{par définition de } \mathbb{A}_{l-1} \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbb{l}_{l-1}^t \mathbb{f}_l \rangle_{L^2} && \text{par définition de } \mathbf{v}_{l-1} \\ &= \langle \mathbb{l}_{l-1}^l \mathbf{w}, \mathbb{f}_l \rangle_{L^2} && \text{par définition de la transposée} \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbb{f}_l \rangle_{L^2} && \text{puisque } \mathbb{l}_{l-1}^l \text{ est l'injection canonique } V_{l-1} \hookrightarrow V_l \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbb{A}_l \mathbf{v}_l \rangle_{L^2} && \text{par définition de } \mathbf{v}_l \\ &= a(\mathbf{v}_l, \mathbf{w}) && \text{par définition de } \mathbb{A}_l \end{aligned}$$

Ceci correspond à l'hypothèse du théorème précédent. Ainsi, on obtient :

$$\forall \mathbb{f}_l \in V_l, \quad \|\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_{l-1}\|_{L^2} \leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \|\mathbb{A}_l \mathbf{v}_l\|_{L^2}$$

Ce qui s'écrit encore,

$$\forall \mathbb{f}_l \in V_l, \quad \|\mathbb{A}_l^{-1} \mathbb{f}_l - \mathbb{l}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{l}_{l-1}^t \mathbb{f}_l\|_{L^2} \leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \|\mathbb{f}_l\|_{L^2}$$

■

3.1.2 Propriétés de lissage-Itération de Richardson

On s'intéresse ici à l'itération $\mathbf{e}^{\nu+1} = \mathbb{S}_l \mathbf{e}^\nu$, avec $\mathbb{S}_l = \left(\text{Id} - \frac{1}{\omega_l} \mathbb{A}_l \right)$ et $\omega_l \geq \rho(\mathbb{A}_l)$.

Théorème 6.

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega_l \geq \rho(\mathbb{A}_l) \text{ alors } \|\mathbb{S}^\nu \mathbf{e}^0\|_{L^2} &\leq \|\mathbf{e}^0\|_{L^2} \\ \text{et} & \\ \|\mathbb{A}_l \mathbb{S}^\nu \mathbf{e}^0\|_{L^2} &\leq \frac{\omega_l}{\nu+1} \|\mathbf{e}^0\|_{L^2} \end{aligned}$$

Démonstration :

On a $\mathbb{S}^\nu \mathbf{e}^0 = \mathbf{e}^\nu$.

\mathbb{A}_l étant défini positif sur V_l , on peut choisir une base orthonormale (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$) de vecteurs propres. Notons cette base $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{N_l}$. On peut également supposer que les valeurs propres associées

(toutes réelles positives) vérifient $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N_l}$. Ainsi $\mathbb{A}_l \mathbf{z}_i = \lambda_i \mathbf{z}_i$ et $\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle_{L^2} = \delta_{ij}$.
Décomposons \mathbf{e}^0 dans cette base :

$$\mathbf{e}^0 = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \mathbf{z}_i$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (\text{Id} - \frac{1}{\omega_l} \mathbb{A}_l) \mathbf{e}^0 &= \sum_{i=1}^{N_l} c_i \mathbf{z}_i - \frac{1}{\omega_l} \sum_{i=1}^{N_l} c_i \mathbb{A}_l \mathbf{z}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_l} c_i \mathbf{z}_i - \frac{1}{\omega_l} \sum_{i=1}^{N_l} c_i \lambda_i \mathbf{z}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_l} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega_l}\right) c_i \mathbf{z}_i \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbf{e}^\nu = \sum_{i=1}^{N_l} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega_l}\right)^\nu c_i \mathbf{z}_i$$

Il vient donc,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^\nu\|_{L^2}^2 &= \langle \mathbf{e}^\nu, \mathbf{e}^\nu \rangle_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N_l} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega_l}\right)^{2\nu} c_i^2 \\ &\leq \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{(1 - \xi)^{2\nu}\} \sum_{i=1}^{N_l} c_i^2 \\ &\leq \langle \mathbf{e}^0, \mathbf{e}^0 \rangle_{L^2} \\ &\leq \|\mathbf{e}^0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Ceci démontre la première inégalité.

De plus, on a également $\mathbb{A}_l \mathbf{e}^\nu = \sum_{i=1}^{N_l} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega_l}\right)^\nu c_i \lambda_i \mathbf{z}_i$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}_l \mathbf{e}^\nu\|_{L^2}^2 &= \langle \mathbb{A}_l \mathbf{e}^\nu, \mathbb{A}_l \mathbf{e}^\nu \rangle_{L^2} \\ &= \omega_l^2 \sum_{i=1}^{N_l} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\omega_l}\right)^{2\nu} c_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\omega_l}\right)^2 \\ &\leq \omega_l^2 \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{\xi^2 (1 - \xi)^{2\nu}\} \sum_{i=1}^{N_l} c_i^2 \\ &\leq \omega_l^2 \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{\xi^2 (1 - \xi)^{2\nu}\} \langle \mathbf{e}^0, \mathbf{e}^0 \rangle_{L^2} \\ &= \omega_l^2 \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{\xi (1 - \xi)^\nu\}^2 \|\mathbf{e}^0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Une étude rapide montre que la fonction $\xi \mapsto \xi(1 - \xi)^\nu$ atteint son maximum en $\frac{1}{\nu + 1}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \xi \leq 1} \{\xi(1 - \xi)^\nu\} &\leq \frac{1}{\nu + 1} \left(\frac{\nu}{\nu + 1}\right)^\nu \\ &\leq \frac{1}{\nu + 1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\mathbb{A}_l \mathbf{e}^\nu\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{\omega_l}{\nu + 1}\right)^2 \|\mathbf{e}^0\|_{L^2}^2$

■

3.1.3 Estimation en norme L^2

La situation est la suivante : On dispose de J grilles. On se donne $l \in \{1 \dots J\}$ et on cherche à estimer le taux de convergence du cycle deux grilles entre les grilles l et $l-1$.

Une itération deux grilles s'écrit de la manière suivante (en séparant les trois étapes habituelles) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(0)} &= \mathbf{u}^{old} \\ \mathbf{u}^{(1)} &= S_l^{\nu_1}(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) && \text{Pré-lissage} \\ \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{u}^{(1)} + \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbb{b} - \mathbb{A}_l \mathbf{u}^{(1)}) && \text{Correction grossière} \\ \mathbf{u}^{(3)} &= S_l^{\nu_2}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) && \text{Post-lissage} \\ \mathbf{u}^{new} &= \mathbf{u}^{(3)} \end{aligned}$$

Considérons le cas où S_l^ν représente ν itérations de la méthode de Richardson. Une itération s'écrit $S_l(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) = \mathbf{u}^{(0)} + \frac{1}{\omega_l} (\mathbb{b} - \mathbb{A}_l \mathbf{u}^{(0)})$ c'est-à-dire $S_l(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) = (\text{Id} - \frac{1}{\omega_l} \mathbb{A}_l) \mathbf{u}^{(0)} + \frac{1}{\omega_l} \mathbb{b}$. La première écriture permet de remarquer que, si l'on note \mathbf{u} la solution exacte (ie $\mathbb{A}_l \mathbf{u} = \mathbb{b}$), alors $S_l(\mathbf{u}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) = \mathbf{u}$ et donc $S_l^\nu(\mathbf{u}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) = \mathbf{u}$. Notons $S_l = \left(\text{Id} - \frac{1}{\omega_l} \mathbb{A}_l \right)$. Avec la deuxième écriture, on vérifie facilement par récurrence que

$$S_l^\nu(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) = S_l^\nu \mathbf{u}^{(0)} + \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{\omega_l} S_l^k \mathbb{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \mathbf{u} &= S_l^\nu(\mathbf{u}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) && \text{et donc } \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{\omega_l} S_l^k \mathbb{b} = \mathbf{u} - S_l^\nu \mathbf{u}. \\ &= S_l^\nu \mathbf{u} + \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{\omega_l} S_l^k \mathbb{b} \end{aligned}$$

Il vient donc $S_l^\nu(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbb{A}_l, \mathbb{b}) = S_l^\nu(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}) + \mathbf{u}$ ou encore en notant pour $i = 0, 1, 2, 3$, $\mathbf{e}^i = \mathbf{u} - \mathbf{u}^i$, $\mathbf{e}^1 = S_l^{\nu_1} \mathbf{e}^0$ et $\mathbf{e}^3 = S_l^{\nu_2} \mathbf{e}^2$.

Enfin, on remarque $\mathbf{e}^2 = (\text{Id} - \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l) \mathbf{e}^1$.

Il vient alors $\mathbf{e}^3 = S_l^{\nu_2} (\text{Id} - \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l) S_l^{\nu_1} \mathbf{e}^0$.

ou encore, en notant $\mathbf{e}^{old} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{old}$ et $\mathbf{e}^{new} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{new}$ et $\mathbb{M}_l(\nu_1, \nu_2) = S_l^{\nu_2} (\text{Id} - \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l) S_l^{\nu_1}$,
 $\mathbf{e}^{new} = \mathbb{M}_l(\nu_1, \nu_2) \mathbf{e}^{old}$.

Le corollaire 1 et le théorème 6 ci-dessus permettent d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 7.

Si l'on choisit $\omega_l \geq \rho(\mathbb{A}_l)$ de l'ordre de h_l^{-2} c'est-à-dire $\omega_l = \lambda h_l$ (avec λ constante) et l'on suppose que $\frac{h_{l-1}}{h_l}$ est constant alors il existe une constante C indépendante de h_{l-1} et h_l telle que

$$\|\mathbf{e}^{new}\|_{L^2} \leq C \frac{1}{(\nu_1 + 1)} \|\mathbf{e}^{old}\|_{L^2}$$

Démonstration :

La combinaison des deux lemmes ci-dessus donne :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{new}\|_{L^2} &\leq \|(S_l^{\nu_2})(\mathbb{A}_l^{-1} - \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{I}_{l-1}^l)(\mathbb{A}_l S_l^{\nu_1}) \mathbf{e}^{old}\|_{L^2} \\ &\leq \|(\mathbb{A}_l^{-1} - \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \mathbb{I}_{l-1}^l)(\mathbb{A}_l S_l^{\nu_1}) \mathbf{e}^{new}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \|\mathbb{A}_l S_l^{\nu_1} \mathbf{e}^{new}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{(MC)^2}{\alpha} h_{l-1}^2 \frac{\omega_l}{e} \frac{1}{\nu_1} \|\mathbf{e}^{old}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{(MC)^2}{\alpha e} \frac{1}{\nu_1} \omega_l h_{l-1}^2 \|\mathbf{e}^{old}\|_{L^2} \end{aligned}$$

On a supposé que $\omega_l = \lambda h_l$ et que le rapport $\frac{h_{l-1}}{h_l}$ est constant, on obtient donc l'estimation,

$$\|\mathbf{e}^{new}\|_{L^2} \leq \frac{C}{1 + \nu_1} \|\mathbf{e}^{old}\|_{L^2}$$

avec C une constante générique. ■

Remarque 10 : Les hypothèses du théorème sont légitimes. L'hypothèse sur ω_l est cohérente avec l'estimation de $\rho(\mathbb{A}_l)$ donné en première partie. Le rapport $\frac{h_{l-1}}{h_l}$ est en pratique constant, par exemple s'il vaut 2 cela signifie que le diamètre des éléments du niveau fin est 2 fois plus petit que le diamètre des mailles du niveau grossier.

3.2 Les méthodes multigrilles-Les cycles

La situation est maintenant différente du paragraphe précédent. On dispose toujours de J grilles mais on cherche maintenant à montrer la convergence d'un cycle multiniveaux utilisant les J grilles. Reprenons l'algorithme d'un cycle. Il est défini récursivement en fonction du paramètre ν .

3.2.1 La matrice d'itération

Dans cette section, il s'agit de calculer la matrice d'itération du cycle (à J niveaux) c'est-à-dire la matrice $\mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2)$ telle qu'un cycle soit une itération de la forme :

$$\mathbf{u}^{new} = \mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2)\mathbf{u}^{old} + \mathbb{N}'_J\mathbf{b}$$

Puisqu'un cycle est défini récursivement, nous allons calculer la matrice $\mathbb{M}'_l(\nu_1, \nu_2)$ par récurrence sur l . Dans le cas $l = 2$, nous avons vu dans la section précédente que

$$\mathbf{e}^{new} = \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2)\mathbf{e}^{old}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{new} &= \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2)\mathbf{u}^{old} + (\mathbf{u} - \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2)\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}^{new} &= \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2)\mathbf{u}^{old} + (\text{Id} - \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2))\mathbb{A}_J^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{M}'_2(\nu_1, \nu_2) = \mathbb{M}_2(\nu_1, \nu_2)$ et $\mathbb{N}'_2(\nu_1, \nu_2) = (\text{Id} - \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2))\mathbb{A}_J^{-1}$.

Supposons alors connaître $\mathbb{M}'_{l-1}(\nu_1, \nu_2)$ et $\mathbb{N}'_{l-1}(\nu_1, \nu_2)$ pour $l \geq 3$.

Nous notons \mathbb{M}'_j pour $\mathbb{M}'_j(\nu_1, \nu_2)$ et \mathbb{N}'_j pour $\mathbb{N}'_j(\nu_1, \nu_2)$.

Le cycle avec l niveaux se définit en fonction du cycle à $l - 1$ niveaux de la manière suivante :

- $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{old}$
- $\mathbf{u}^{(1)} = S^{\nu_1}(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbb{A}_l, \mathbf{b})$
- $\mathbf{v}^{(0)} = 0$
- Pour $k = 1 \dots \nu$ Faire : $\mathbf{v}^{(k)} = \mathbb{M}'_{l-1}\mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbb{N}'_{l-1} \left({}^t\mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbf{b} - \mathbb{A}_l\mathbf{u}^{(1)}) \right)$
- $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbf{v}^{(\nu)}$
- $\mathbf{u}^{(3)} = S^{\nu_2}(\mathbf{u}^{(2)}, \mathbb{A}_l, \mathbf{b})$
- $\mathbf{u}^{new} = \mathbf{u}^{(3)}$

Il est possible de calculer explicitement $\mathbf{v}^{(\nu)}$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \mathbb{N}'_{l-1} \left({}^t\mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbf{b} - \mathbb{A}_l\mathbf{u}^{(1)}) \right) \\ \mathbf{v}^{(2)} &= \mathbb{M}'_{l-1}\mathbb{N}'_{l-1} \left({}^t\mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbf{b} - \mathbb{A}_l\mathbf{u}^{(1)}) \right) + \mathbb{N}'_{l-1} \left({}^t\mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbf{b} - \mathbb{A}_l\mathbf{u}^{(1)}) \right) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}^{(\nu)} &= \sum_{k=0}^{\nu-1} (\mathbb{M}'_{l-1})^k \mathbb{N}'_{l-1} \left({}^t\mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbf{b} - \mathbb{A}_l\mathbf{u}^{(1)}) \right) \end{aligned}$$

Remarque 11 : Il est intéressant de remarquer que $\mathfrak{u} = \mathbb{A}_l^{-1} \mathbb{b}$ la solution exacte du problème est un point fixe du cycle (quelque soit le nombre de niveau). En effet, \mathfrak{u} est un point fixe du smoother et on voit avec la formule ci-dessus que lorsque $\mathfrak{u}^{(1)} = \mathfrak{u}$ on a $\mathfrak{v}^{(\nu)} = 0$. Ainsi, on a, pour tout \mathbb{b} , en posant $\mathfrak{u} = \mathbb{A}_l^{-1} \mathbb{b}$, $\mathfrak{u} = \mathbb{M}'_l \mathfrak{u} + \mathbb{N}'_l \mathbb{b}$ c'est-à-dire $(\text{Id} - \mathbb{M}'_l) \mathbb{A}_l^{-1} \mathbb{b} = \mathbb{N}'_l \mathbb{b}$. Ceci étant vrai pour tout \mathbb{b} , il vient $\mathbb{N}'_l = (\text{Id} - \mathbb{M}'_l) \mathbb{A}_l^{-1}$. En conclusion de cette remarque, si l'on suppose qu'une itération d'un cycle à la forme $\mathfrak{u}^{new} = \mathbb{M}'_l \mathfrak{u}^{old} + \mathbb{N}'_l \mathbb{b}$ alors $\mathbb{N}'_l = (\text{Id} - \mathbb{M}'_l) \mathbb{A}_l^{-1}$. On a

$$\mathfrak{u}^{(2)} = \left(\text{Id} - \mathbb{I}_{l-1}^l \sum_{k=0}^{\nu-1} (\mathbb{M}'_{l-1})^k \mathbb{N}'_{l-1} {}^t \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l \right) \mathfrak{u}^{(1)} + \left(\mathbb{I}_{l-1}^l \sum_{k=0}^{\nu-1} (\mathbb{M}'_{l-1})^k \mathbb{N}'_{l-1} {}^t \mathbb{I}_{l-1}^l \right) \mathbb{b}.$$

Avec la remarque ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\nu-1} (\mathbb{M}'_{l-1})^k \mathbb{N}'_{l-1} &= \sum_{k=0}^{\nu-1} (\mathbb{M}'_{l-1})^k (\text{Id} - \mathbb{M}'_{l-1}) \mathbb{A}_{l-1}^{-1} \\ &= \text{Id} - (\mathbb{M}'_{l-1})^\nu \end{aligned}$$

donc

$$\mathfrak{u}^{(2)} = \left(\text{Id} - \mathbb{I}_{l-1}^l (\text{Id} - (\mathbb{M}'_{l-1})^\nu) \mathbb{A}_{l-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l \right) \mathfrak{u}^{(1)} + \left(\mathbb{I}_{l-1}^l \sum_{k=0}^{\nu-1} (\mathbb{M}'_{l-1})^k \mathbb{N}'_{l-1} {}^t \mathbb{I}_{l-1}^l \right) \mathbb{b}$$

Avec l'expression du lisseur donnée dans la section précédente, on montre alors facilement que l'itération du cycle à l niveaux est de la forme voulue avec

$$\mathbb{M}'_l(\nu_1, \nu_2) = \mathbb{S}^{\nu_2} \left(\text{Id} - \mathbb{I}_{l-1}^l (\text{Id} - (\mathbb{M}'_{l-1})^\nu) \mathbb{A}_{l-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l \right) \mathbb{S}^{\nu_1}.$$

Cela s'écrit encore

$$\mathbb{M}'_l(\nu_1, \nu_2) = \mathbb{M}_l(\nu_1, \nu_2) + \mathbb{S}^{\nu_2} \left(\mathbb{I}_{l-1}^l (\mathbb{M}'_{l-1})^\nu \mathbb{A}_{l-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{l-1}^l \mathbb{A}_l \right) \mathbb{S}^{\nu_1}.$$

3.2.2 Convergence en norme L^2

La remarque de la section précédent permet d'obtenir : $\mathfrak{e}^{new} = \mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2) \mathfrak{e}^{old}$, il s'agit donc de majorer la norme de l'opérateur $\mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2)$ de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Cette norme d'opérateur est notée $\| \cdot \|_{L^2}$. Tout d'abord rappelons quelques résultats obtenus dans la section concernant les itérations deux grilles.

$$\begin{aligned} \| \mathbb{S}^\nu \|_{L^2} &\leq 1 \\ \| \mathbb{M}_l(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} &\leq \frac{C}{1 + \nu_1} \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2)$ est défini par récurrence, on obtient la majoration suivante (en utilisant le fait que \mathbb{I}_{J-1}^J est l'injection canonique) :

$$\begin{aligned} \| \mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} &\leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + \| \mathbb{S}^{\nu_2} \|_{L^2} \| \mathbb{I}_{J-1}^J (\mathbb{M}'_{J-1})^\nu \mathbb{A}_{J-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_J \mathbb{S}^{\nu_1} \|_{L^2} \\ &\leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + \| (\mathbb{M}'_{J-1})^\nu \mathbb{A}_{J-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_J \mathbb{S}^{\nu_1} \|_{L^2} \\ &\leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + \| \mathbb{M}'_{J-1} \|_{L^2}^\nu \| \mathbb{A}_{J-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_J \mathbb{S}^{\nu_1} \|_{L^2} \\ &\leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + \| \mathbb{M}'_{J-1} \|_{L^2}^\nu \| \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_{J-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_J \mathbb{S}^{\nu_1} \|_{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_{J-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_J \mathbb{S}^{\nu_1} &= \mathbb{S}^{\nu_1} - \left(\mathbb{A}_{J-1}^{-1} - \mathbb{I}_{J-1}^J \mathbb{A}_{J-1}^{-1} {}^t \mathbb{I}_{J-1}^J \right) \mathbb{A}_J \mathbb{S}^{\nu_1} \\ &= \mathbb{S}^{\nu_1} - \mathbb{M}_J(\nu_1, 0) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \| \mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} &\leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + \| \mathbb{M}'_{J-1} \|_{L^2}^\nu \| \mathbb{S}^{\nu_1} - \mathbb{M}_J(\nu_1, 0) \|_{L^2} \\ &\leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + \| \mathbb{M}'_{J-1} \|_{L^2}^\nu \| \mathbb{S}^{\nu_1} \|_{L^2} + \| \mathbb{M}_J(\nu_1, 0) \|_{L^2} \end{aligned}$$

Cependant il existe $\bar{\nu} > 0$ tel que $(\nu_1 > \bar{\nu} \implies \| \mathbb{M}_J(\nu_1, 0) \|_{L^2} < 1)$.

Et donc si $\nu_1 > \bar{\nu}$ alors $\| \mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} \leq \| \mathbb{M}_J(\nu_1, \nu_2) \|_{L^2} + 2 * \| \mathbb{M}'_{J-1} \|_{L^2}^\nu$

Lemme 4 (technique).

<p>Soit $\nu \geq 2$; $C^* > 0$ tel que $C^* \nu > 1$ et $0 < \xi < \frac{\nu-1}{\nu} (\nu C^*)^{-1/(\nu-1)}$ Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de réels vérifie $u_1 \leq \xi$ et $\forall n \leq 2$, $u_n \leq \xi + C^*(u_{n-1})^\nu$ Alors u_n est bornée par $\xi^* < 1$ avec ξ^* vérifiant de plus, $\xi = \xi^* - C^*(\xi^*)^\nu$</p>
--

Ce lemme permet de conclure que

Théorème 8.

Soit $\nu \geq 2$. Soit $\xi' \in]0, 1[$ fixé. Alors Il existe $\underline{\nu} > 0$ tel que

$$\forall \nu_1 > \underline{\nu}, \quad \|\mathbb{M}'_J(\nu_1, \nu_2)\|_{L^2} < \xi'$$

Ce résultat montre en particulier la convergence des itérations de W-cycle.

3.3 Les préconditionneurs additifs

Dans cette sous-section, sont présentés les résultats théoriques de conditionnement obtenus pour le système préconditionné par P_{BPX} et P_{HB} . Ces résultats sont essentiels car ils permettent d'estimer la vitesse de convergence de la méthode du gradient conjugué préconditionné et donc le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le système à précision fixée.

3.3.1 BPX**Théorème 9.**

Il existe une constante C indépendante de h telle que $\text{cond}(P_{BPX}A) \leq C$.

Le nombre d'itérations nécessaire pour résoudre le système préconditionné par P_{BPX} est donc indépendant de h .

3.3.2 HB**Théorème 10.**

Il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\text{cond}(P_{HBA}) \leq \begin{cases} C & \text{si } d=1 \\ |\log h|^2 & \text{si } d=2 \\ h^{2-d} & \text{si } d=3 \end{cases}$$

Ce résultat est moins "bon" que dans le cas de BPX. Le résultat est optimal en dimension 1 mais il se dégrade en dimension 2 et 3. Ce n'était pas le cas pour BPX.

4 Quelques résultats numériques : En une dimension

Les calculs de cette section ont été réalisés avec Scilab pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0, 1[\\ u(0) = 0 \text{ et } u(1) = 0 \end{cases}$$

La formulation variationnelle s'écrit :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1]) \text{ tel que } \forall v \in H_0^1(]0, 1]), \int_0^1 u'v' = \int_0^1 f v$$

c'est-à-dire

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(u, v) = l(v)$$

où l'on a posé

- $V = H_0^1(]0, 1])$
- $a(u, v) = \int_0^1 u'v'$
- $l(v) = \int_0^1 f v$

On considère le cas de discrétisations éléments fini \mathbb{P}_1 sur des maillages uniformes. Pour $j \in \{1 \dots J\}$, on pose donc $h_j = \frac{1}{2^j}$ (“pas” du maillage). L’intervalle $[0, 1]$ est alors découpé en 2^j éléments. Ainsi, pour notre problème de Dirichlet homogène, le nombre de noeuds intérieurs et donc d’inconnues est $2^j - 1$. Le système linéaire obtenu est alors donné par la matrice :

$$A_j = \frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

De plus, dans ce qui suit le second membre est fixé à :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans les sections suivantes, on examine le comportement des cycles multigrilles (présentés en section 2.4) sous l’influence des différents paramètres ainsi que l’efficacité des préconditionneurs multiniveaux (présentés en section 2.5).

4.1 Les cycles multigrilles

L’efficacité des cycles multigrilles est basé sur la combinaison de lissage et de corrections grossières. Le lissage est obtenu à partir de méthodes classiques (voir section 2.2.2). Illustrons ceci sur notre exemple.

4.1.1 Propriétés des lisseurs

Les figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 présentent les résultats obtenus après quelques itérations de l’une des méthodes suivantes : Richardson (figures 1, 2, 3 et 4), Jacobi (figures 5, 6, 7 et 8) et Gauss-Seidel (figures 9, 10, 11 et 12). Pour chaque méthode, les résultats sont présentés de la même manière. Des groupes de 8 graphiques représentent soit l’erreur $u - u^{old}$ soit le résidu $b - Au^{old}$ toutes les deux itérations de la méthode considérée. Ainsi, le premier graphique en haut à gauche est obtenu avec l’itérée initiale alors que le dernier en bas en droite est obtenu avec la 14^{ième}. De plus pour chaque vecteur $u - u^{old}$ ou $b - Au^{old}$, deux représentations sont disponibles, l’une dans la base canonique de \mathbb{R}^d (en trait continu bleu, figures 1, 3, 5, 7, 9 et 11), l’autre dans la base de vecteurs propres de A (en bâton noir, figures 2, 4, 6, 8, 10 et 12).

Les représentations dans la base canonique permettent d’apprécier l’effet lissant des méthodes alors que celles dans la base de vecteurs propres de A permet d’identifier les “fréquences” que la méthode fait converger rapidement.

Il apparaît que les méthodes de Richardson et Gauss-Seidel, même après seulement deux itérations font converger les hautes fréquences. Ce sont de très bon lisseurs. Par contre, la méthode de Jacobi fait converger rapidement les fréquences intermédiaires alors que les hautes et basses fréquences convergent lentement. Ainsi, on constate sur la figure 5 que la méthode de Jacobi ne possède pas la même propriété “de lisseur” que les méthodes de Richardson et Gauss-Seidel.

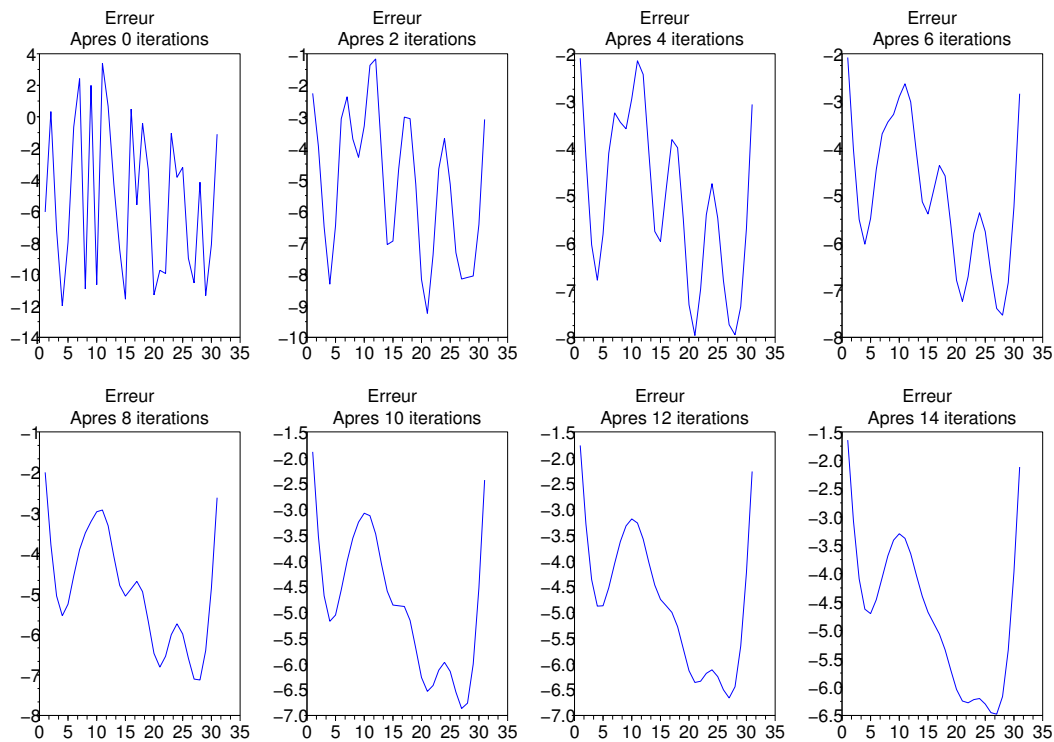


FIG. 1 – Itérations de Richardson-Composantes de l'erreur.

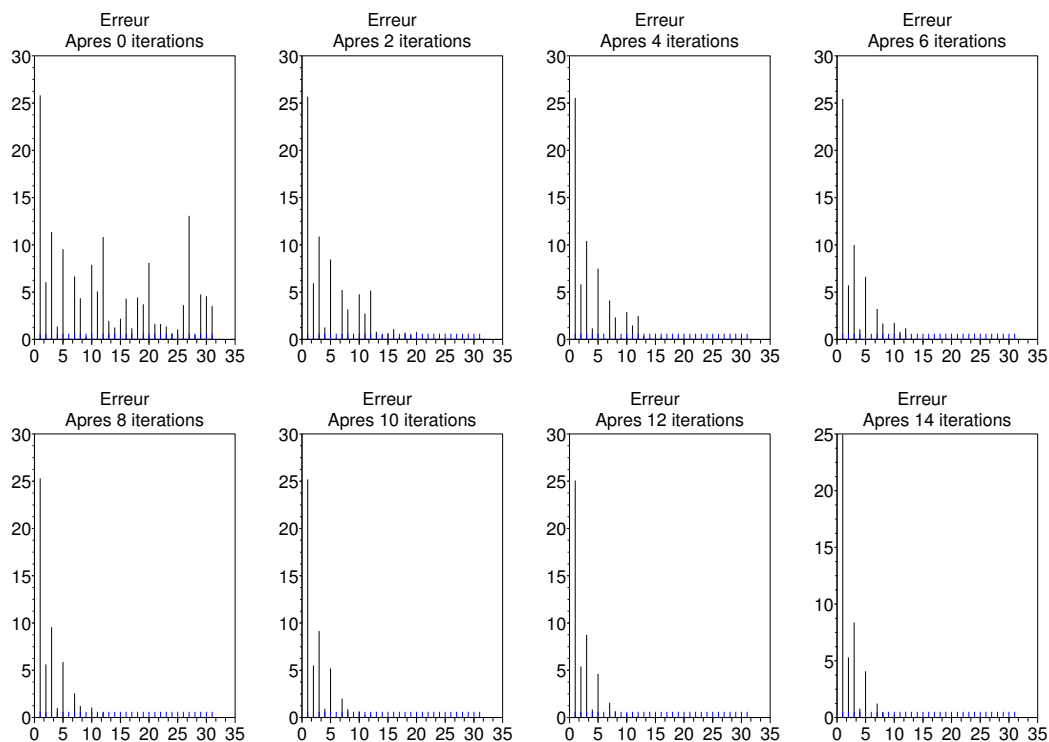


FIG. 2 – Itérations de Richardson-Fréquences de l'erreur.

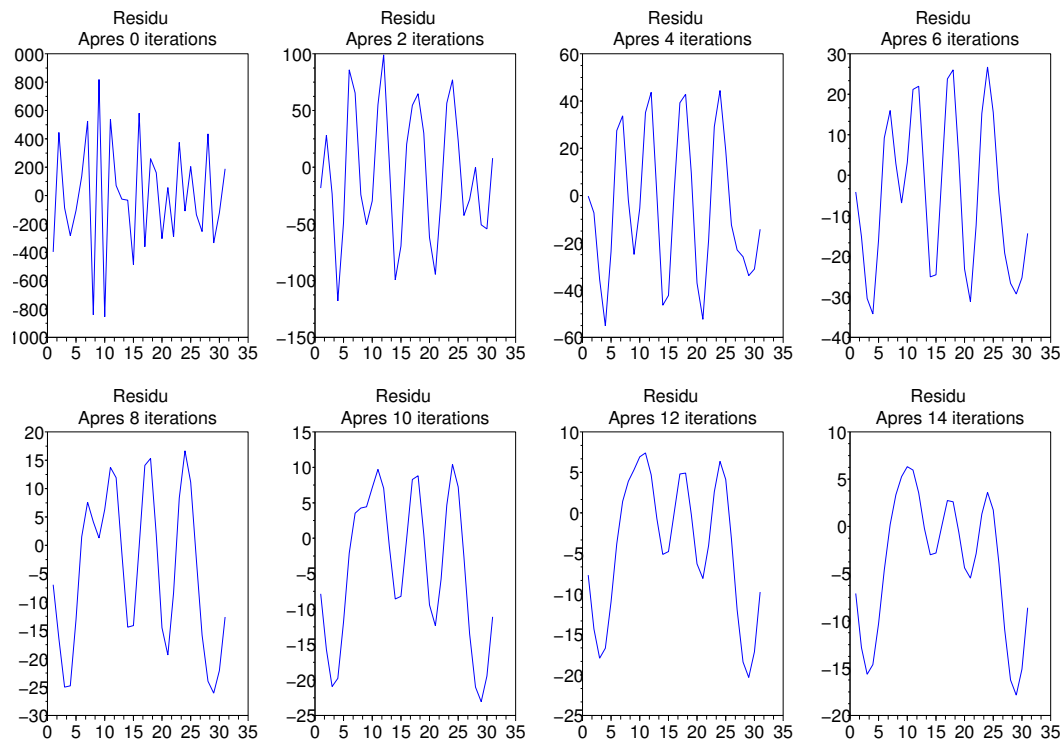


FIG. 3 – Itérations de Richardson-Composantes du résidu.

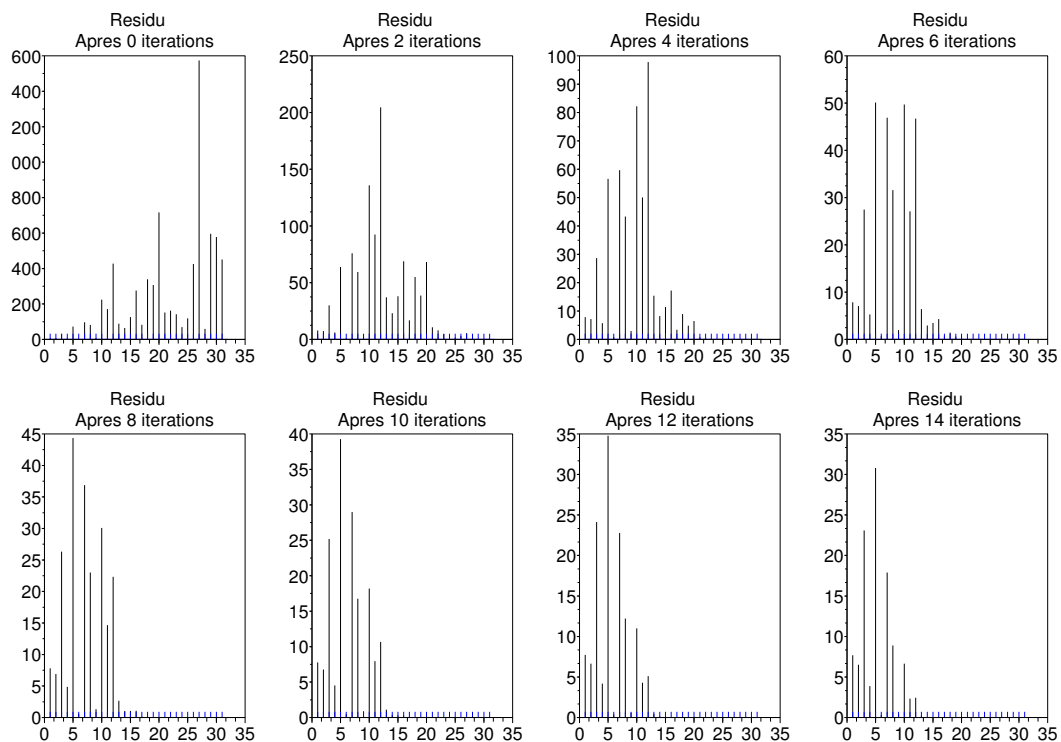


FIG. 4 – Itérations de Richardson-Fréquences du résidu.

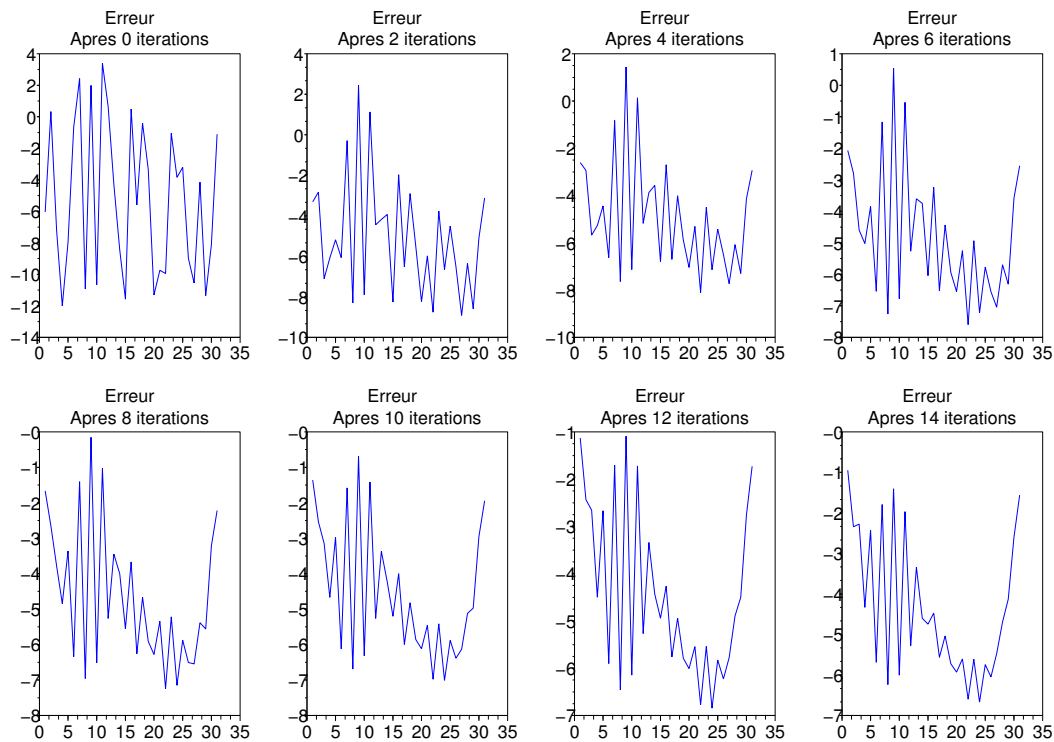


FIG. 5 – Itérations de Jacobi-Composantes de l'erreur.

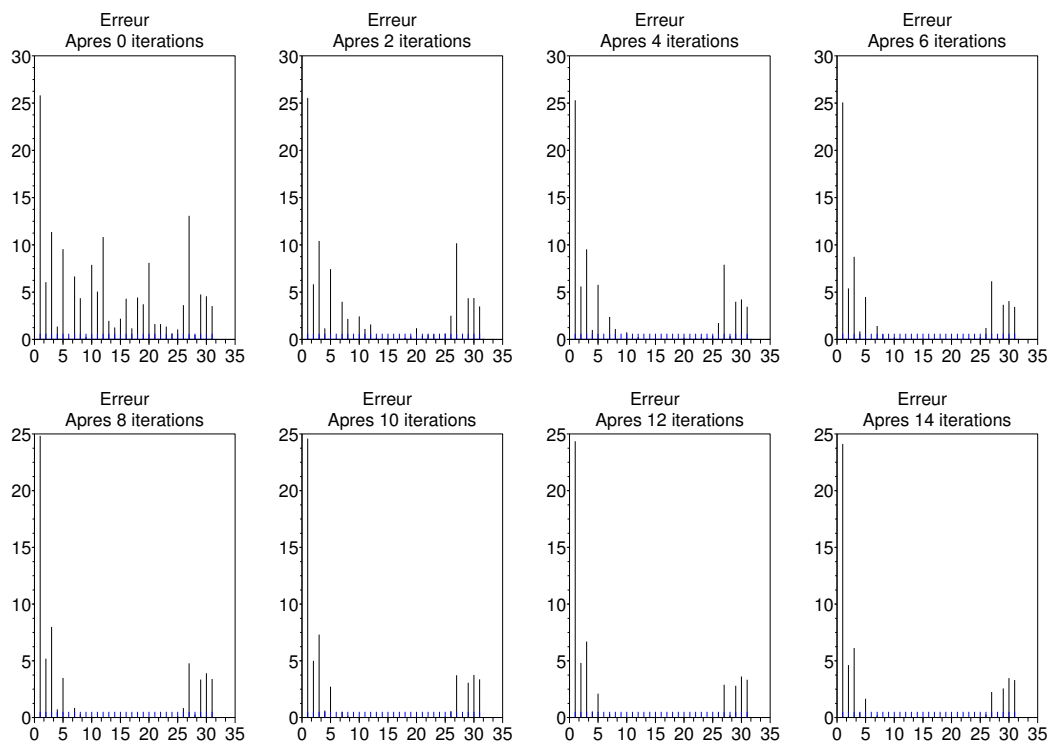


FIG. 6 – Itérations de Jacobi-Fréquences de l'erreur.

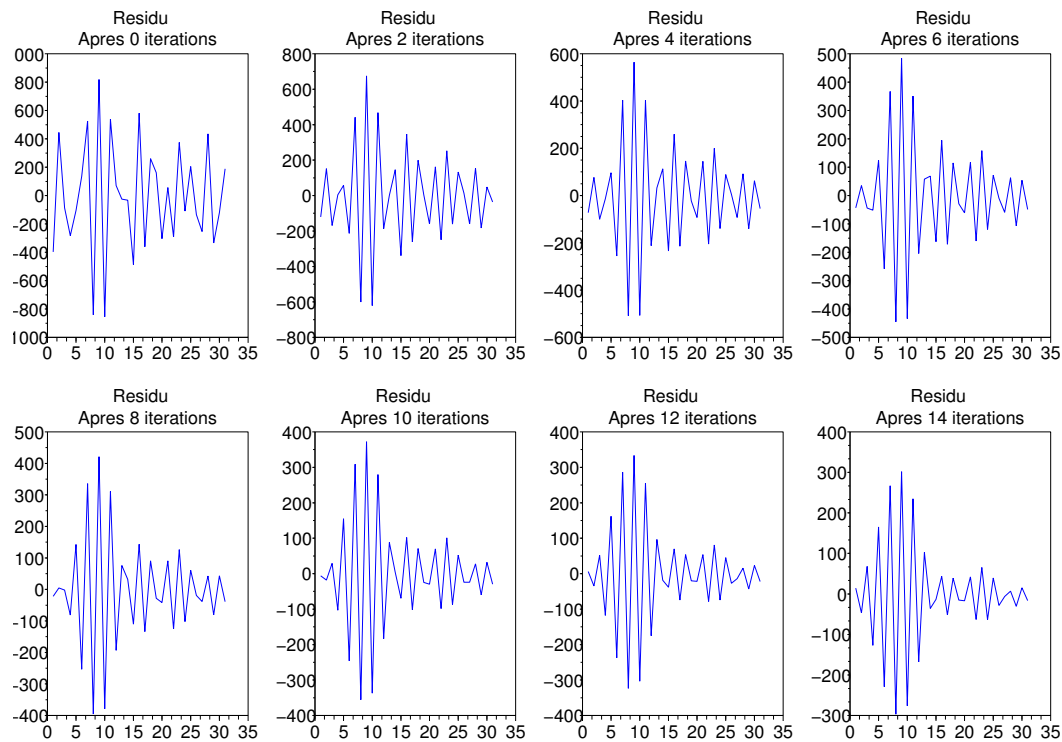


FIG. 7 – Itérations de Jacobi-Composantes du résidu.

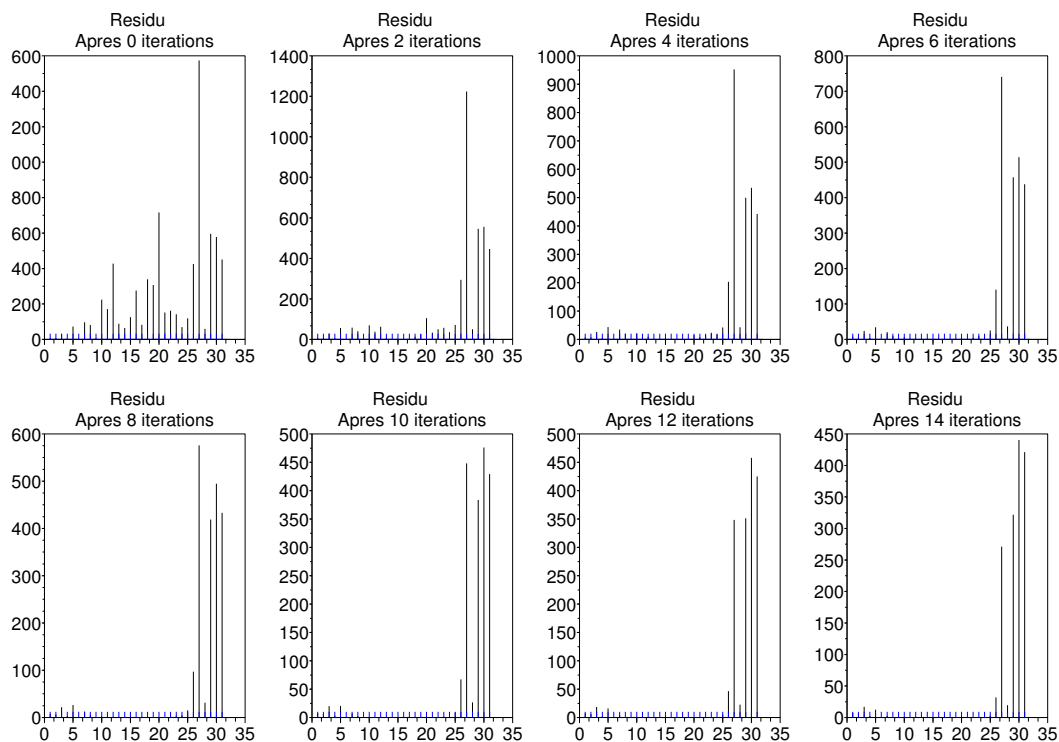


FIG. 8 – Itérations de Jacobi-Fréquences du résidu.

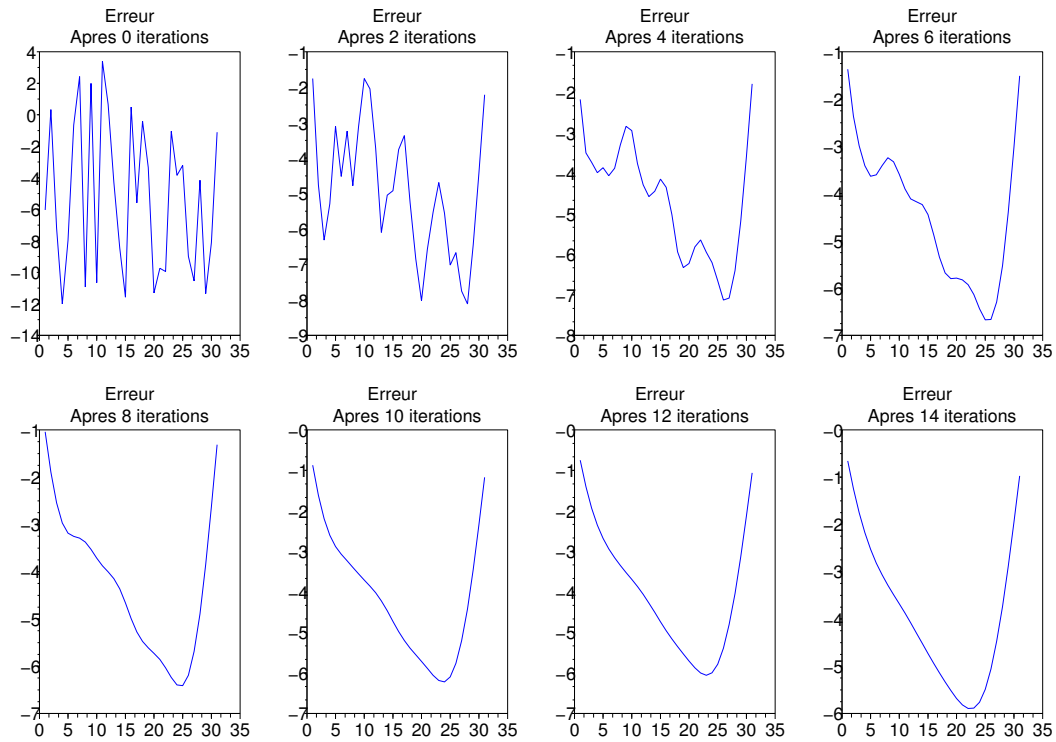


FIG. 9 – Itérations de Gauss-Seidel-Composantes de l'erreur.

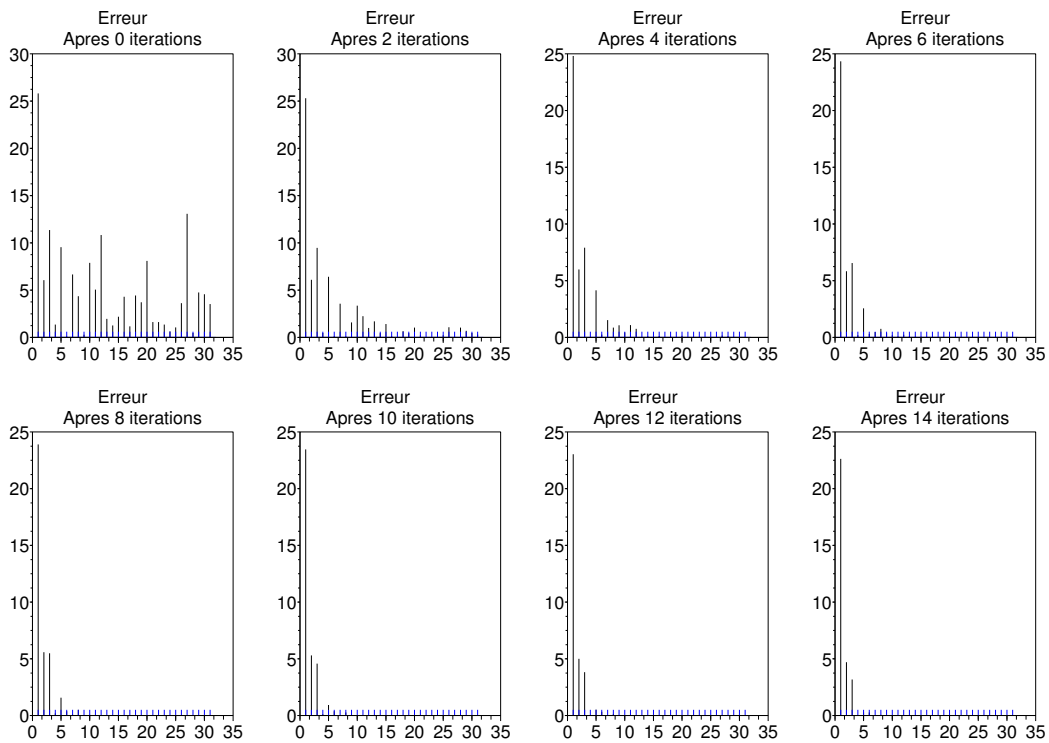


FIG. 10 – Itérations de Gauss-Seidel-Fréquences de l'erreur.

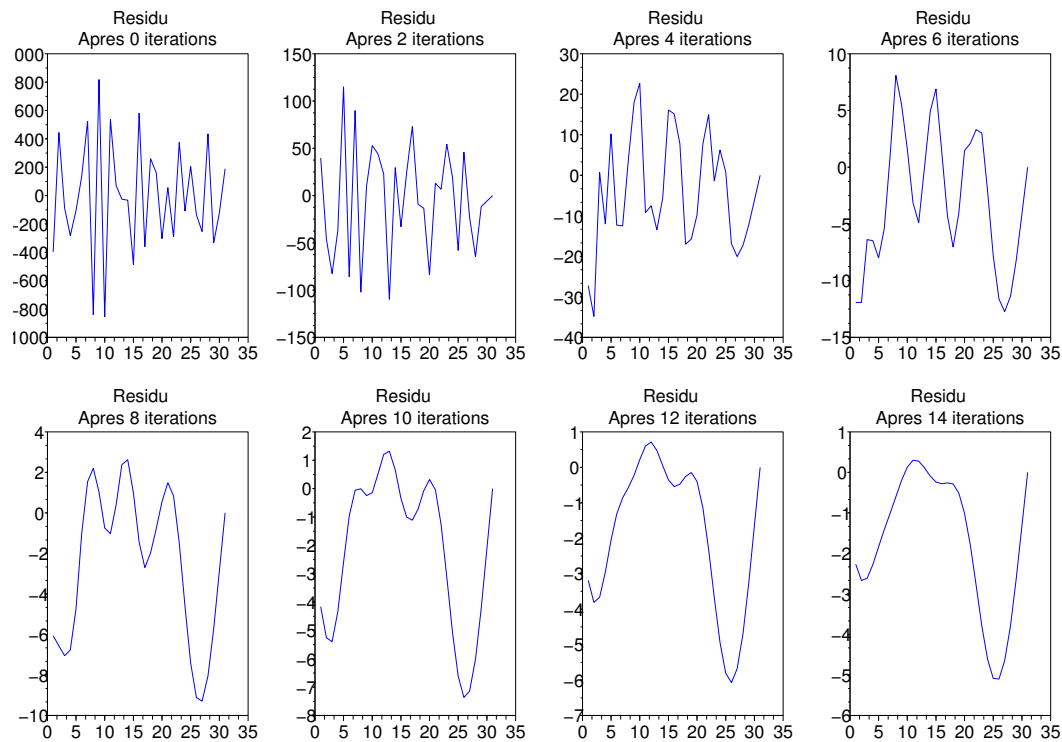


FIG. 11 – Itérations de Gauss-Seidel-Composantes du résidu.

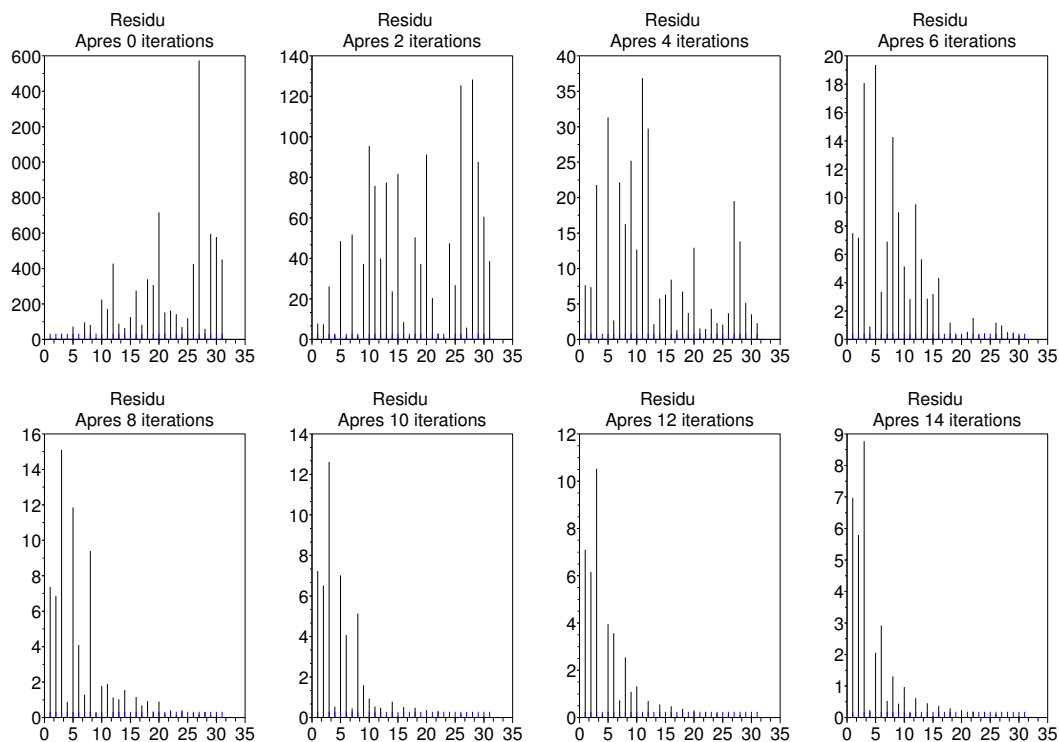


FIG. 12 – Itérations de Gauss-Seidel-Fréquences du résidu.

Comme cela a été rappelé ci-dessus, les cycles multigrilles sont basés sur la combinaison de lissage et de corrections grossières. Montrons comment ces différentes étapes agissent sur l'erreur.

4.1.2 Les étapes du cycle

Le cycle considéré dans cette partie est un cycle à deux grilles avec 3 étapes de pré- et post-lissages réalisé avec la méthode de Gauss-Seidel.

La présentation des résultats (figures 13 et 14) est la même que dans la section précédente. La figure 13 représente les composantes de l'erreur dans la base canonique à chaque étape du cycle alors que la figure 14 représente les composantes de l'erreur dans une base de vecteurs propres de A .

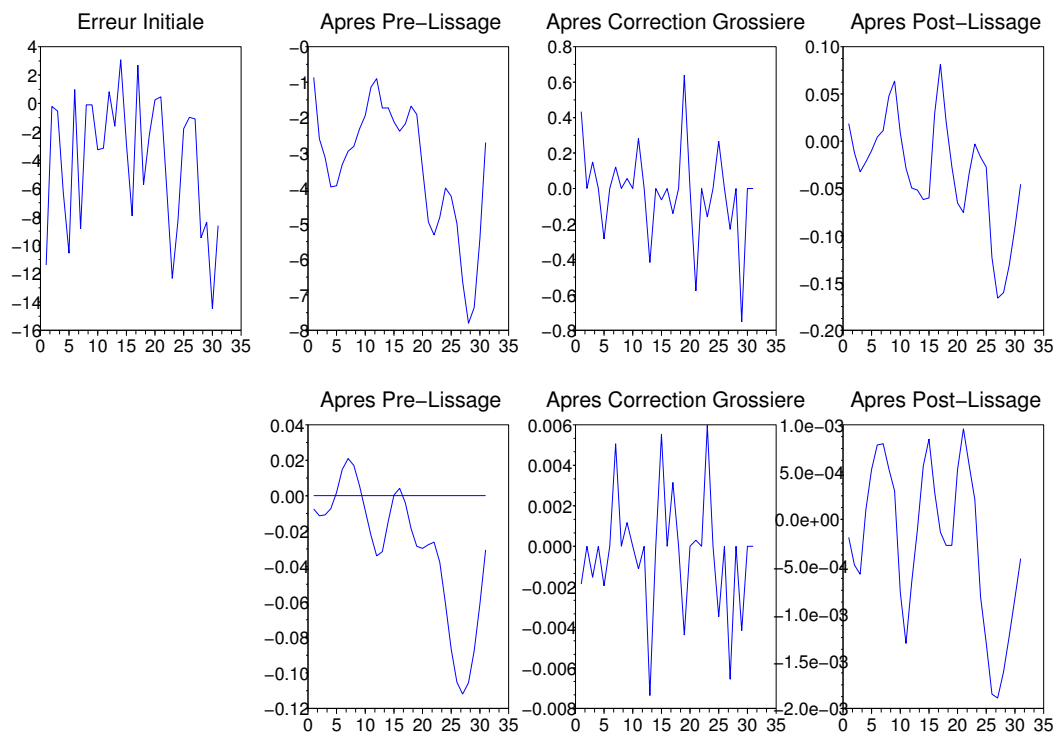


FIG. 13 – Les étapes du multigrilles-Les composantes de l'erreur.

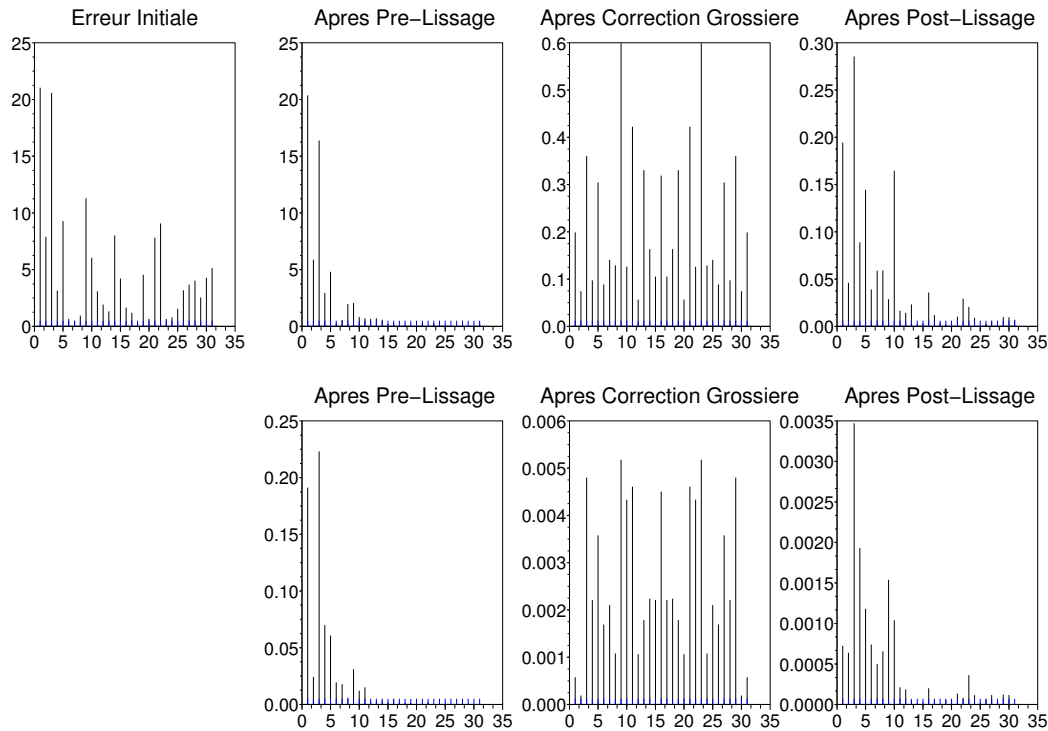


FIG. 14 – Les étapes du multigrilles-Les fréquences de l’erreur.

Les différents graphiques ne sont bien sûr pas à la même échelle. On constate que l’étape de correction grossière diminue les basses fréquences, les ramenant au même ordre de grandeur que les hautes fréquences.

4.1.3 Comportement lorsque le “pas” du maillage diminue

Illustrons maintenant le théorème 8. Les tableaux ci-dessus présentent les résultats obtenus pour des V-cycles et W-cycles avec 3 étapes de pré- et post-lissages réalisé avec la méthode de Gauss-Seidel. Le nombre de niveaux est le nombre maximum de niveaux disponibles, c’est-à-dire 2 niveaux grossiers pour la première colonne, 3 pour la seconde, ..., 8 pour la dernière. Le nombre de cycle et le temps de calcul donnés sont ceux nécessaires pour que la norme deux du résidu soit inférieure à 10^{-7} .

Convergence du V-cycle

Taille de la matrice	7	15	31	63	127	255	511
“Pas” du maillage	0.125	0.063	0.031	0.015	0.008	0.004	0.002
Nombre de cycles effectués	5	6	6	6	6	7	7
Temps de calcul	0.22	0.27	0.35	0.45	0.58	0.91	1.34
Norme du résidu	$6e-9$	$4e-9$	$2e-8$	$5e-8$	$1e-7$	$7e-9$	$1e-8$

Convergence du W-cycle

Taille de la matrice	7	15	31	63	127	255	511
“Pas” du maillage	0.125	0.063	0.031	0.015	0.008	0.004	0.002
Nombre de cycles effectués	5	5	5	5	5	5	5
Temps de calcul	0.37	0.77	1.61	3.31	6.77	13.99	27.8
Norme du résidu	$6e-9$	$2e-8$	$2e-8$	$3e-8$	$3e-8$	$4e-8$	$6e-8$

On constate que le nombre de cycle nécessaire n’augmente pas lorsque le nombre d’inconnues augmente. Par contre, chaque cycle devient plus coûteux en temps de calcul.

4.1.4 Influence des nombres de pré- et post-lissage

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats obtenus grâce à un V-cycle en fonction du nombre de pré- et post-lissage. La taille de la matrice est 511 et le nombre de niveaux grossiers utilisé est 8 c’est-à-dire jusqu’au

niveau ne contenant qu'un seul noeud.

Nombre de Post-Lissages \ Nombre de Pré-Lissages		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	nombre de cycles	200	23	14	11	10	9	9	8	8	8	8
	temps de calcul	NCV	3.67	2.45	1.98	1.92	1.86	2.19	1.71	1.81	1.97	1.90
1	nombre de cycles	18	11	9	8	7	7	6	7	7	7	6
	temps de calcul	3.82	1.85	1.64	1.75	1.44	1.82	1.53	2.05	1.78	2.12	1.59
2	nombre de cycles	10	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6
	temps de calcul	1.75	1.25	1.63	1.25	1.61	1.32	1.34	1.48	1.89	1.65	2.0
3	nombre de cycles	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5
	temps de calcul	1.33	1.18	1.24	1.77	1.32	1.39	1.39	1.25	4.2	1.33	1.36
4	nombre de cycles	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5
	temps de calcul	1.43	1.19	1.21	1.08	1.13	1.16	1.29	1.28	2.81	1.35	1.35
5	nombre de cycles	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	temps de calcul	1.22	1.02	1.10	1.10	1.22	1.24	1.23	1.34	1.38	1.36	1.51
6	nombre de cycles	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	temps de calcul	1.20	1.08	1.18	1.17	1.23	1.25	1.28	1.35	1.54	1.40	1.46
7	nombre de cycles	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	temps de calcul	1.07	1.14	1.15	1.16	1.24	1.28	1.32	1.44	1.40	1.50	1.52
8	nombre de cycles	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4
	temps de calcul	1.22	1.17	1.20	1.20	1.28	1.36	1.37	1.51	1.45	1.50	1.24
9	nombre de cycles	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4
	temps de calcul	1.22	1.22	1.30	1.24	1.32	1.36	1.44	1.49	1.19	1.28	1.30
10	nombre de cycles	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4
	temps de calcul	1.55	1.22	1.30	1.32	1.37	1.43	1.43	1.23	1.25	1.30	1.30

Il apparaît que lorsqu'il n'y a pas d'étape de lissage, le V-cycle ne converge pas (200 étant le maximum de cycle autorisé). Il converge, par contre dès qu'une seule étape est effectuée. On remarque de plus que ce tableau n'est pas symétrique. Les étapes de post-lissage semblent être plus efficaces. Ceci est encore illustré sur la figure 15 où est représenté, en rouge la première colonne, en vert la première ligne et en bleu la diagonale. Enfin, on constate qu'il est inutile d'augmenter fortement le nombre d'étapes de lissage puisque le nombre de cycle nécessaire n'en est pas pour autant diminué et le temps de calcul est alors plus important. Au vue de ce tableau, il semble judicieux de ne pas dépasser 5 étapes.

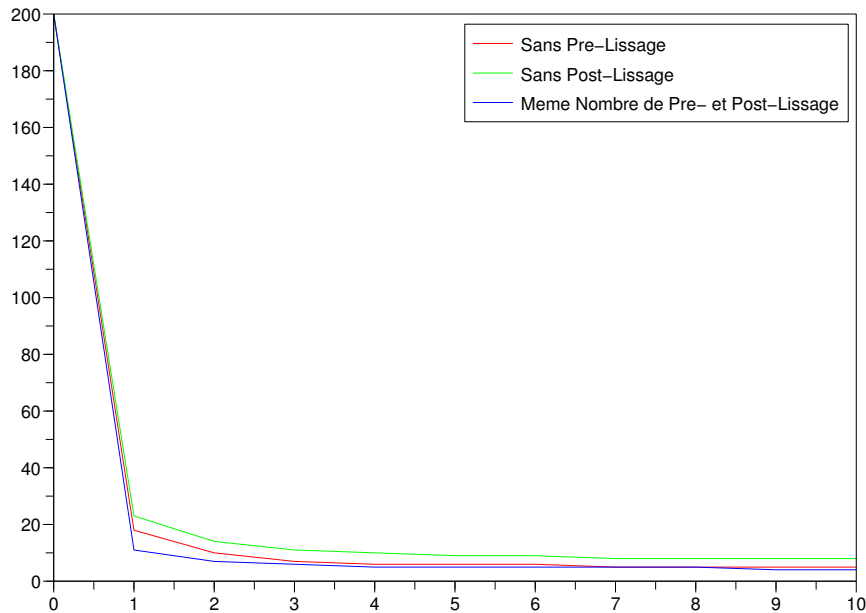


FIG. 15 – Influence du nombre de lissages

4.2 Préconditionneurs multiniveaux

4.2.1 HB-Base hiérarchique

Dans notre exemple, le préconditionneur P_{HB} est l'inverse de la matrice A pour deux raisons particulières liées à l'exemple choisi. La première est que la forme bilinéaire a est exactement le produit scalaire H_0^1 et que les espaces W_j introduits dans la section 2.1.5 sont alors en somme directe orthogonale (le maillage est uniforme). De plus, la matrice A_j est diagonale car les fonctions de la base hiérarchique en une dimension ont des supports disjoints. La matrice B_j , partie diagonale de A_j lui est alors égale. Le calcul de P_{HB} consiste alors à effectuer un calcul de l'inverse de A par changement de base, base dans laquelle l'opérateur A est diagonal.

4.2.2 BPX-Bramble Pasciak Xu

Tout d'abord illustrons le théorème 9.

Le premier tableau ci-dessous et la figure 16 montrent comment évolue le conditionnement des matrices A et AP_{BPX} en fonction du "pas" du maillage c'est-à-dire de la taille de la matrice. Le préconditionneur est calculé à partir de tous les niveaux disponibles.

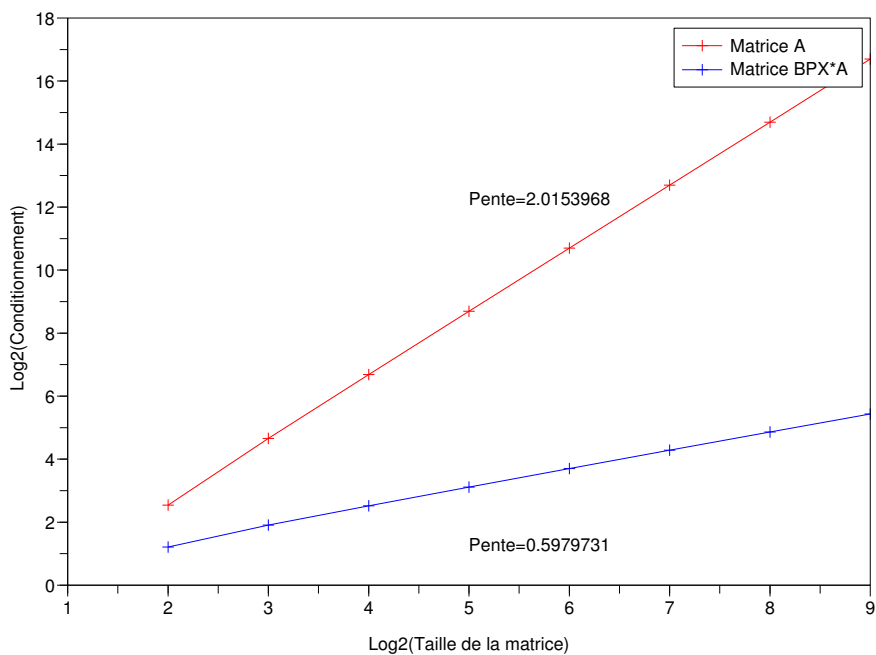


FIG. 16 – Comparaison des conditionnements de A et $P_{BPX} \times A$

Taille de la matrice A	3	7	15	31	63	127	255	511
Conditionnement de A	6	25	103	414	1660	6640	26560	106240
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$	2	4	6	9	13	20	30	43

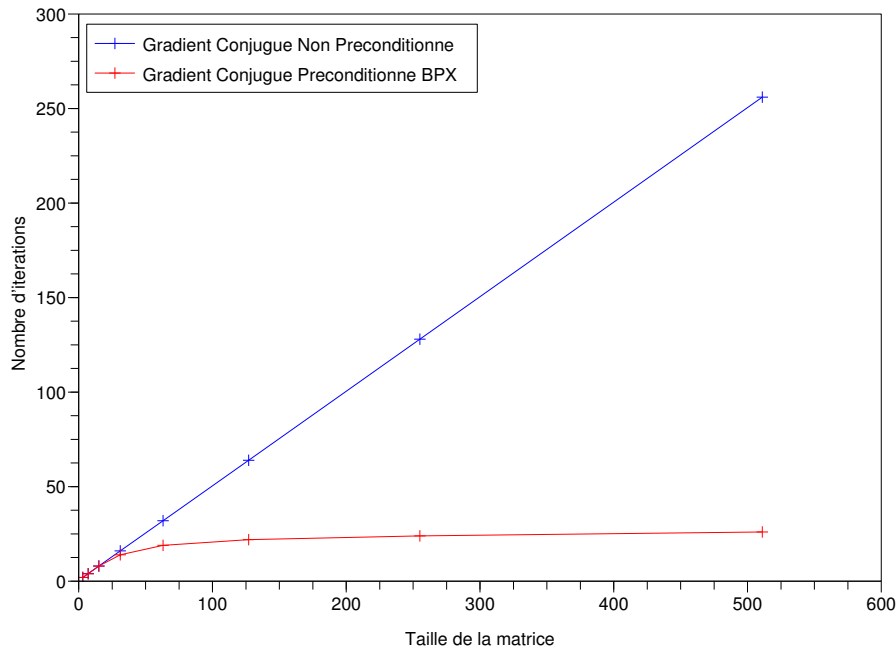


FIG. 17 – Comparaison du nombre d'itérations du gradient conjugué et du gradient conjugué préconditionné par P_{BPX}

La vitesse de convergence de la méthode du gradient conjugué est directement relié au conditionnement. Le tableau ci-dessous montre le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un résidu de norme inférieure à 10^{-7} . Ce tableau est illustré par la figure 17.

Taille de la matrice A	3	7	15	31	63	127	255	511
Nombre d'itérations du gradient conjugué	2	4	8	16	32	64	128	256
Nombre d'itérations du gradient conjugué préconditionné par P_{BPX}	2	4	8	14	19	22	24	26

Enfin, le tableau ci-dessous montre l'influence du choix du nombre de niveaux pour le calcul de P_{BPX} .

Taille de la matrice A	3	7	15	31	63	127	255	511
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 1 niveau	2	8	31	125	500	2000	8000	31900
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 2 niveaux		4	11	40	170	670	2700	10800
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 3 niveaux			6	15	60	230	930	3750
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 4 niveaux				9	20	80	330	1310
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 5 niveaux					13	30	120	460
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 6 niveaux						20	45	165
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 7 niveaux							30	65
Conditionnement de $P_{BPX} \times A$ utilisant 8 niveaux								43

5 Quelques résultats numériques : En deux dimensions

Les calculs de cette section ont été réalisés avec PELICANS, plateforme logicielle développée à l'IRSN pour le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (*)$$

5.1 Les cycles multigrilles

5.1.1 Les étapes du cycle

Les graphiques ci dessous représentent l'erreur à différents instants de l'algorithme multigrille : après le pré-lissage, après la correction du niveau grossier et après le post-lissage; ceci pour deux cycles.

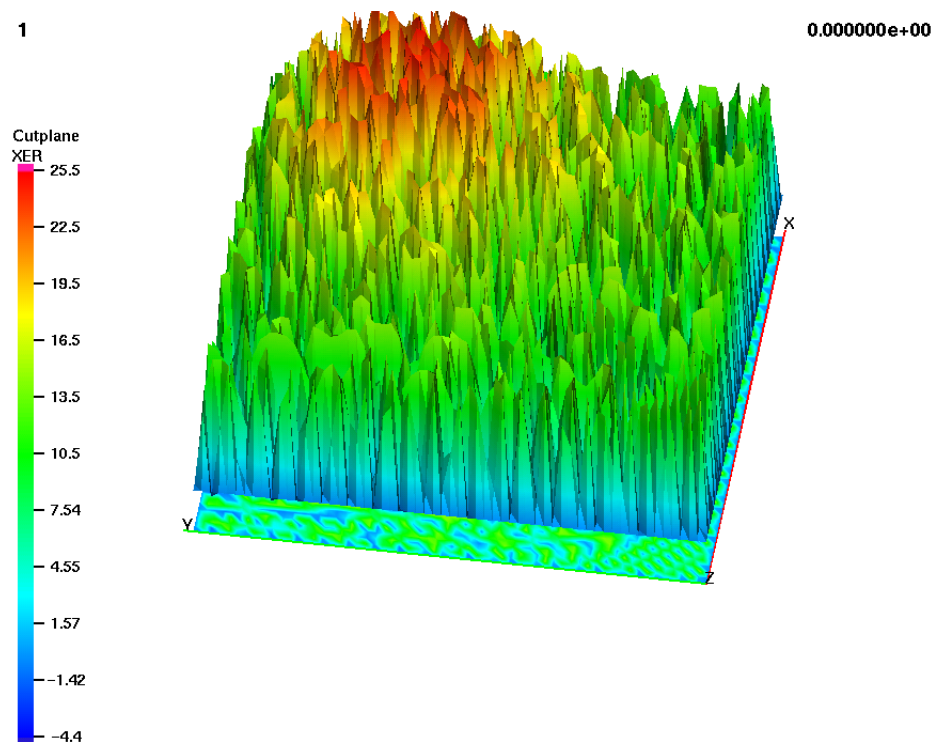


FIG. 18 – Itéree Initiale.

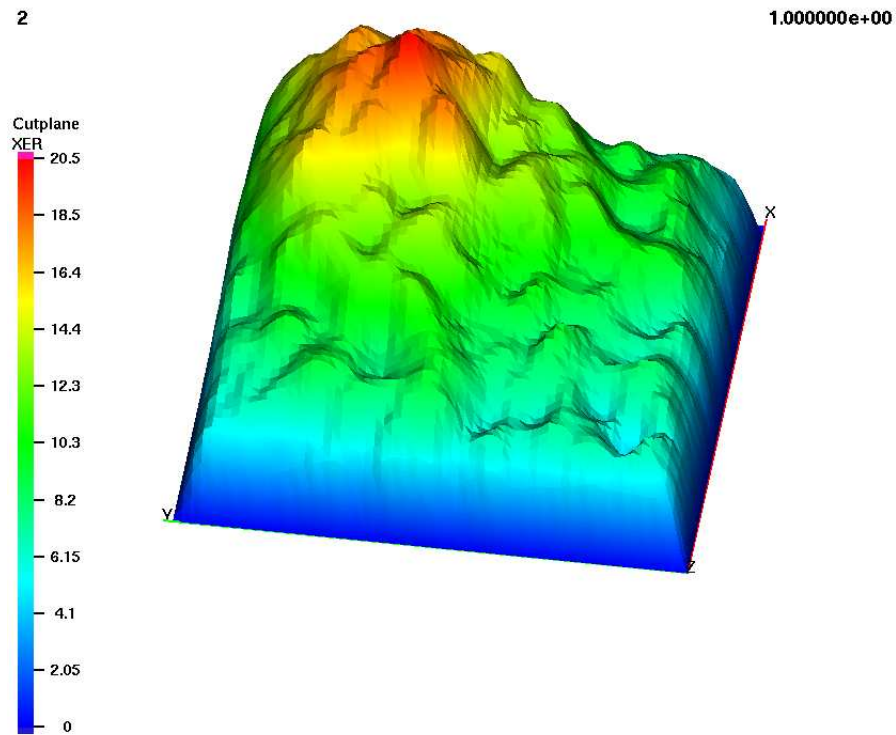


FIG. 19 – 1^{er} cycle - Après PreLissage (3 itérations de Gauss-Seidel)

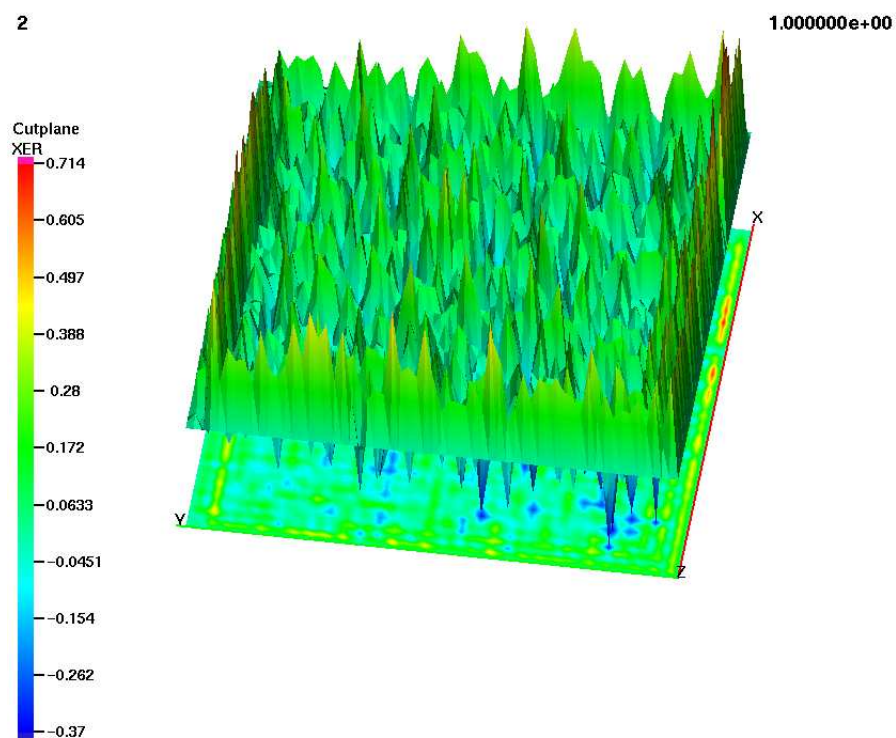


FIG. 20 – 1^{er} cycle - Après Correction Niveau Grossier

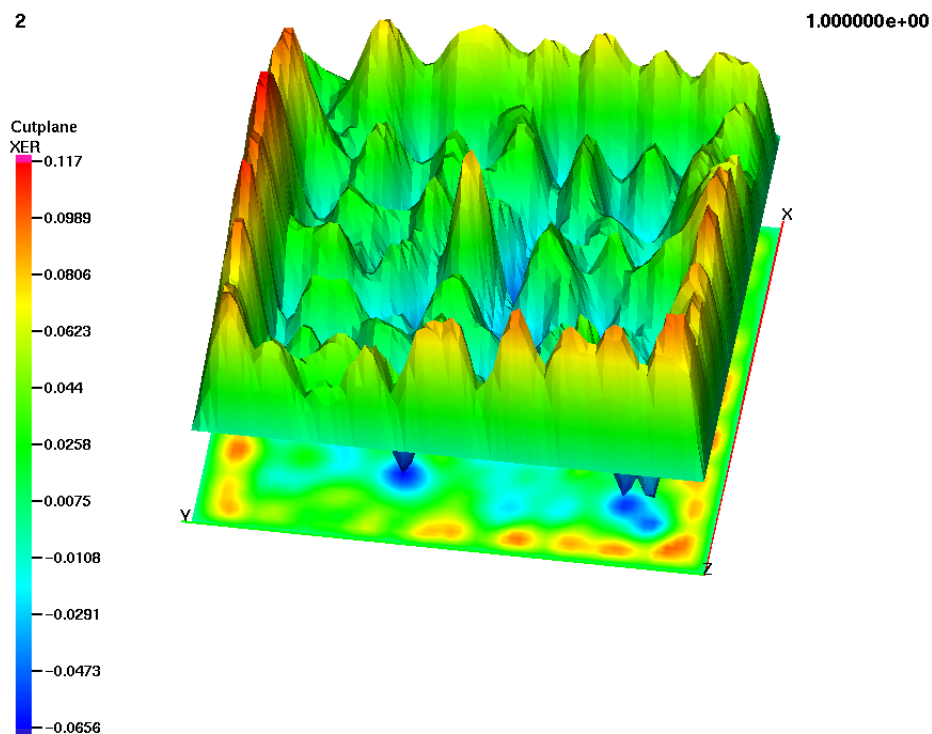


FIG. 21 – 1^{er} cycle - Après PostLissage

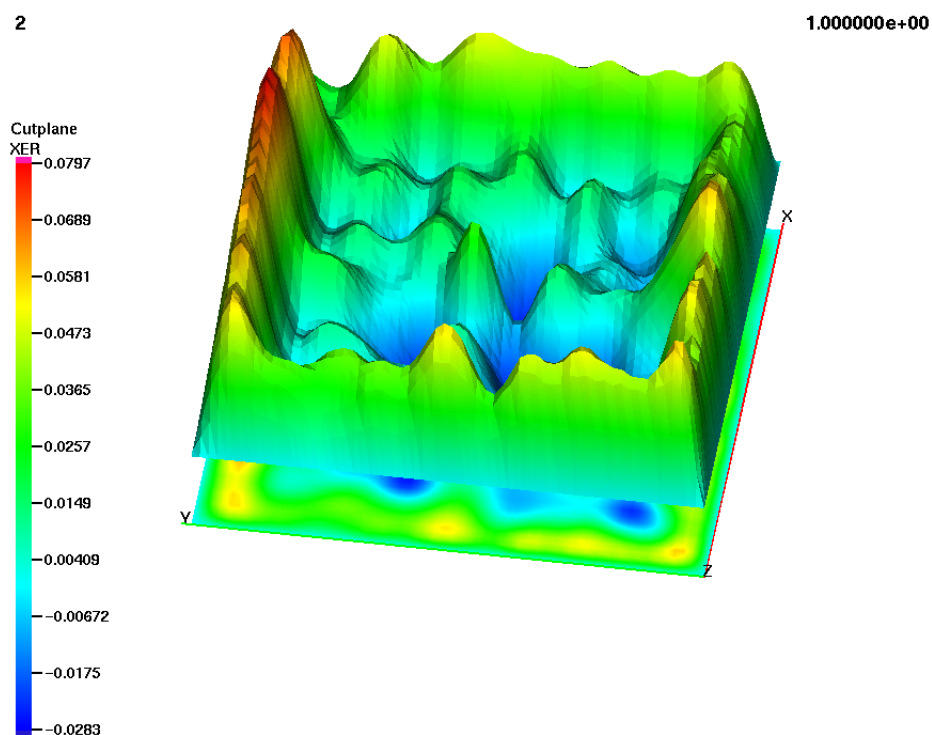
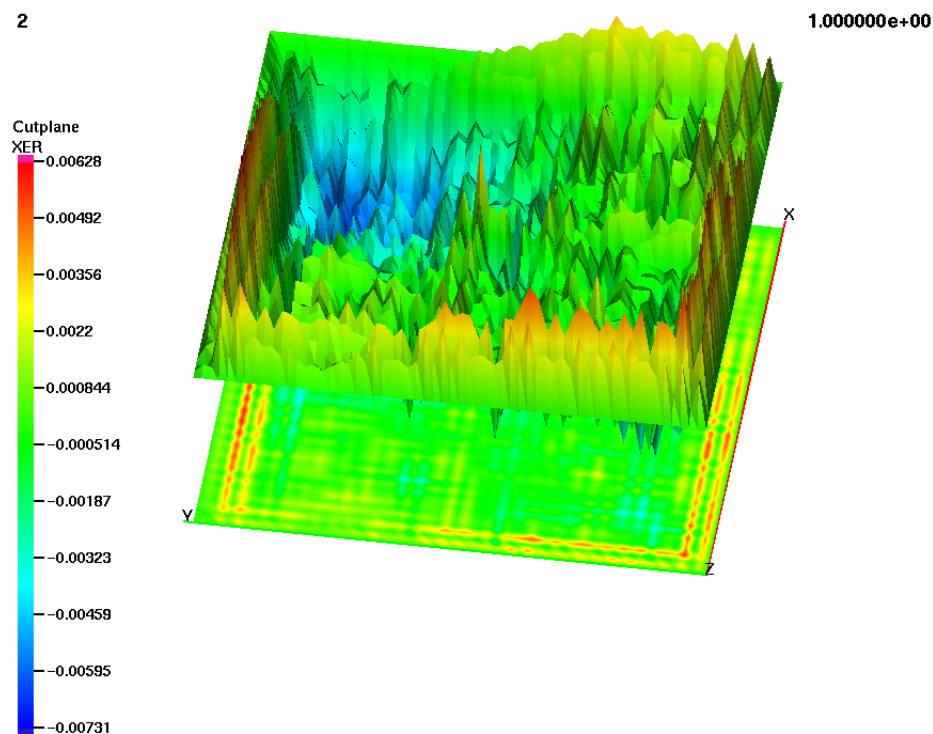
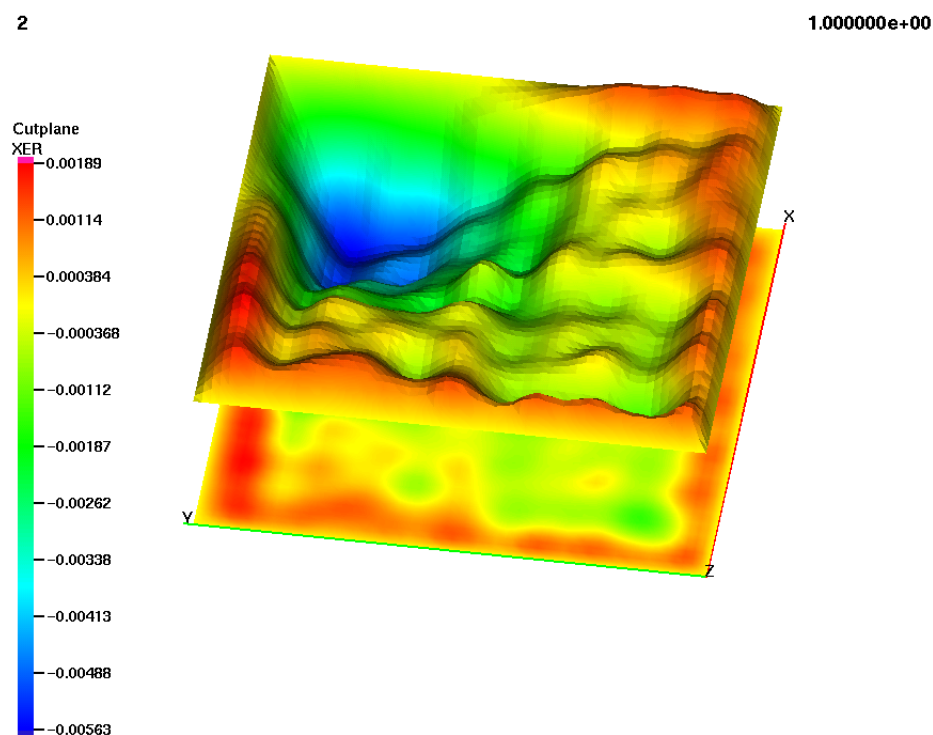


FIG. 22 – 2^{ème} cycle - Après PreLissage (3 itérations de Gauss-Seidel)

FIG. 23 – 2^{ème} cycle - Après Correction Niveau GrossierFIG. 24 – 2^{ème} cycle - Après PostLissage (3 itérations de Gauss-Seidel)

On observe une situation similaire à celle observée en une dimension c'est-à-dire les étapes de pré- et post-lissage rendent l'erreur plus "régulière" et la correction de la grille grossière permet d'atténuer les basses fréquences restantes.

5.2 Les méthodes multiniveaux - Comparaison

Les tests ont été réalisés sur le problème (*) où le second membre f a été choisi pour que la solution u soit celle représentée sur la figure 25.

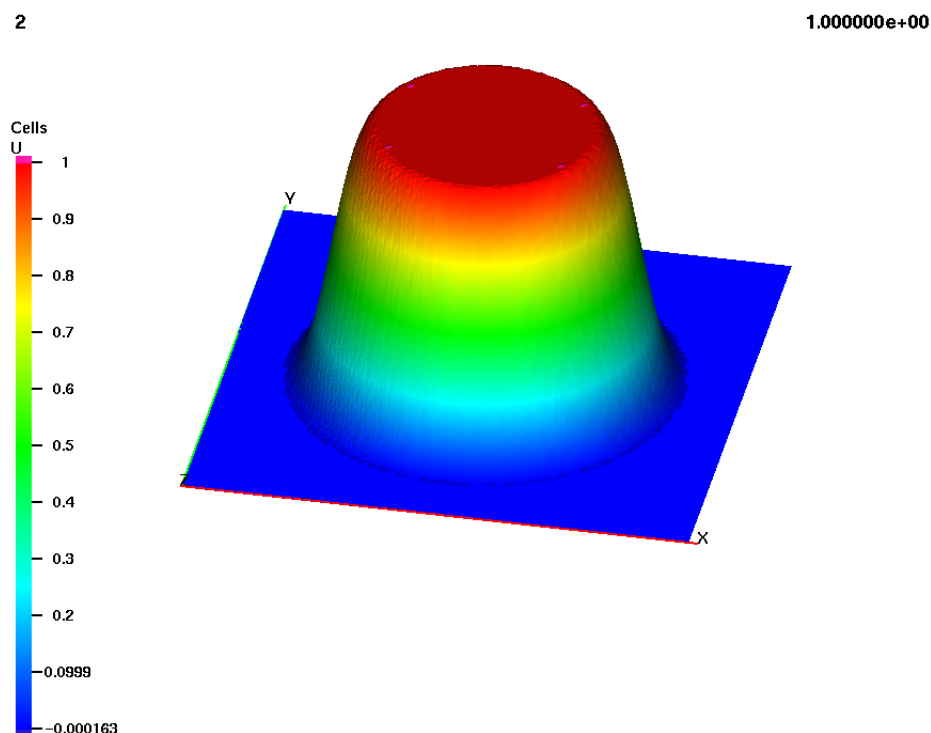


FIG. 25 – Solution Exacte.

La discrétisation a été réalisée avec des éléments Q1 sur les figures 26, 27, et 28 et avec des éléments Q2 sur les figures 29, 30, et 31.

Chaque figure représente le nombre d'itérations de la méthode du gradient conjugué en fonction du nombre d'inconnues du problème fin (qui est proportionnel à l'inverse de la taille du maillage). Pour les préconditionneurs multiniveaux, ont été utilisés deux niveaux sur les figures 26 et 29, trois niveaux sur les figures 27 et 30, et quatre niveaux sur les figures 28 et 31.

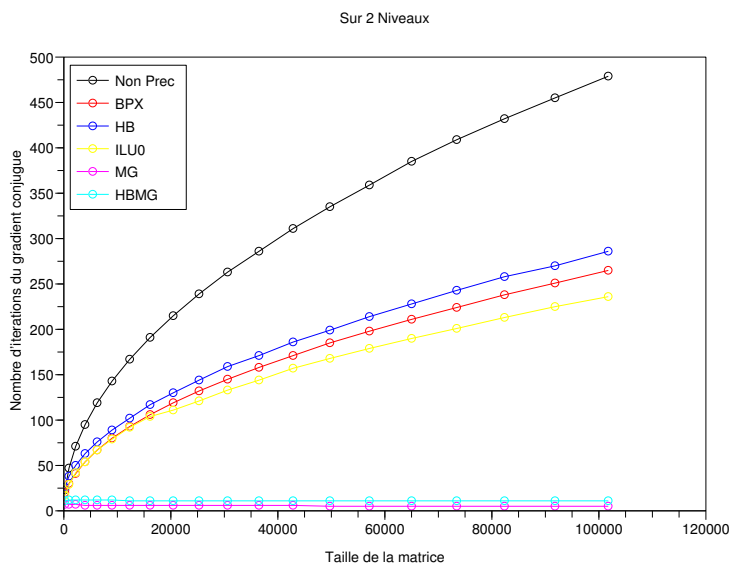


FIG. 26 – Comparaison avec 2 Niveaux. Elément 2D-Q1.

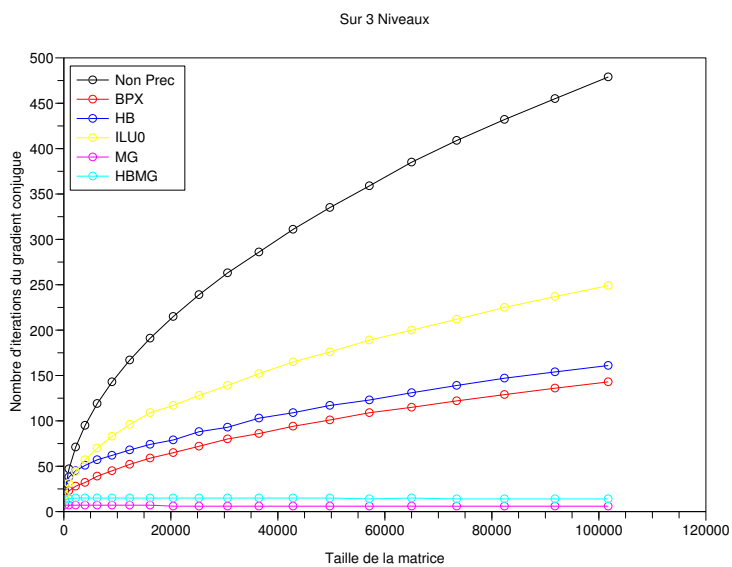


FIG. 27 – Comparaison avec 3 Niveaux. Elément 2D-Q1.

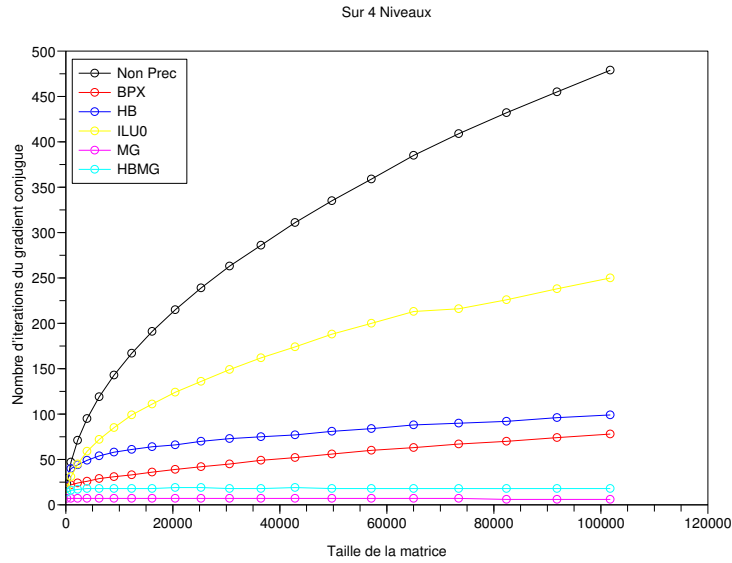


FIG. 28 – Comparaison avec 4 Niveaux. Elément 2D-Q1.

On constate tout d’abord que les préconditionneurs multigrilles MG et HBMG donnent de très bon résultats avec un nombre d’itérations constant : 7 pour MG et 11 pour HBMG lorsque deux niveaux sont utilisés. Les préconditionneurs additifs BPX et HB fournissent des résultats peu satisfaisants lorsque seulement deux niveaux sont utilisés (en comparaison avec ILU0 par exemple), par contre dès que l’on utilise trois niveaux et que l’on a un nombre important d’inconnues ces deux préconditionneurs donnent des résultats nettement meilleurs.

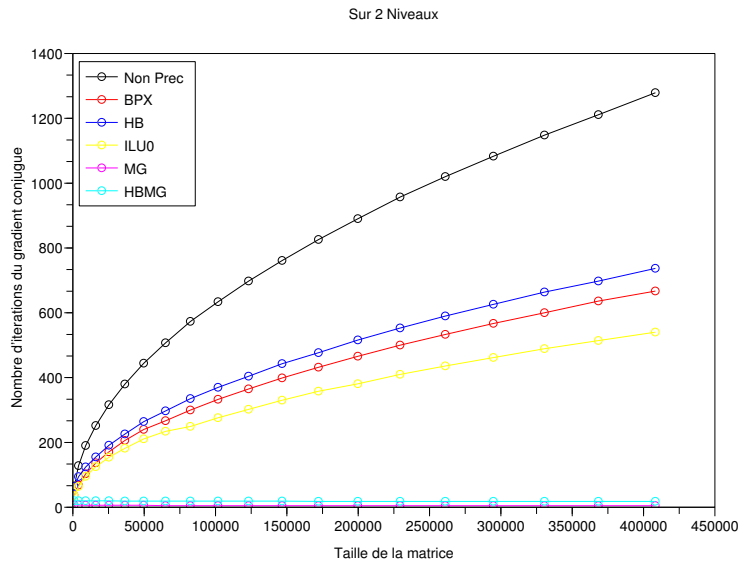


FIG. 29 – Comparaison avec 2 Niveaux. Elément 2D-Q2.

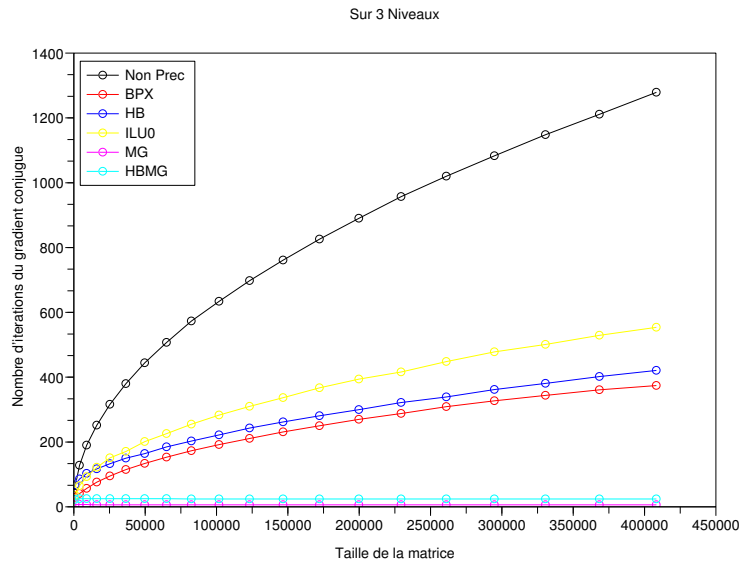


FIG. 30 – Comparaison avec 3 Niveaux. Élément 2D-Q2.

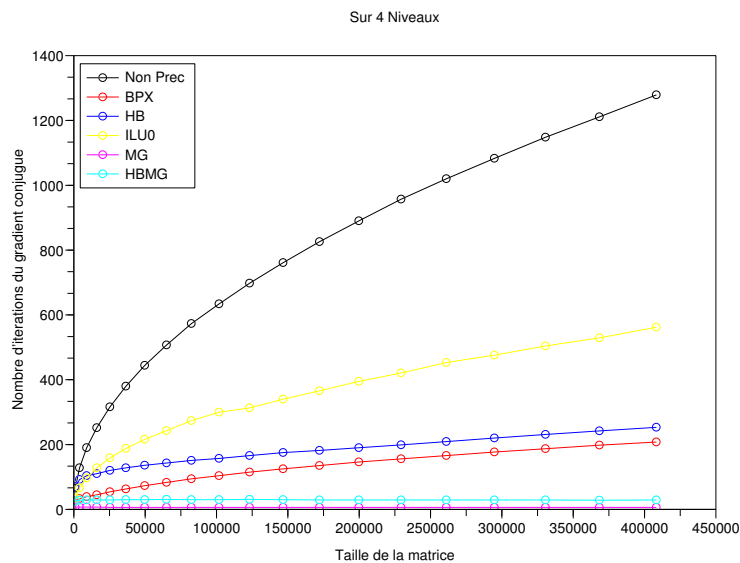


FIG. 31 – Comparaison avec 4 Niveaux. Élément 2D-Q2.

Les résultats sont similaires dans le cas des discrétisations Q1 ou Q2.

6 Quelques résultats numériques : En trois dimensions

6.1 Methodes Multiniveaux - Une comparaison

Le cas test choisi est identique à celui de la section deux dimension (ie le second membre est choisi pour que la solution prenne la valeur 1 dans une boule au centre du domaine, prenne la valeur zeros en dehors d'une boule de rayon plus grand que la première et passe régulièrement d'une valeur à l'autre).

Les figures 32, 33, 34, 35, 36 permettent de comparer le nombre d'itérations dans la méthode du gradient conjugué préconditionnée par les différents préconditionneurs multiniveaux.

Les figures 32, 33 et 34 ont été obtenu à partir d'une discrétisation Q1 alors que les figures 35 et 36 ont été obtenu à partir d'une discrétisation Q2.

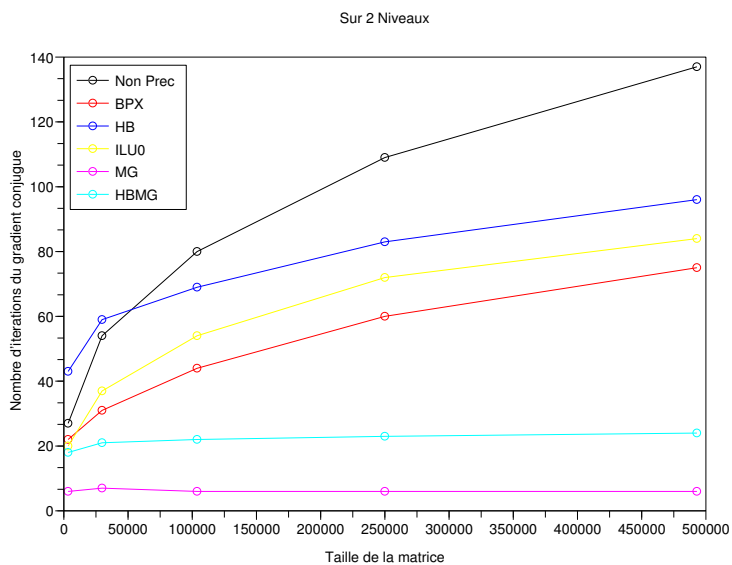


FIG. 32 – Comparaison avec 2 Niveaux. Elément 3D-Q1.

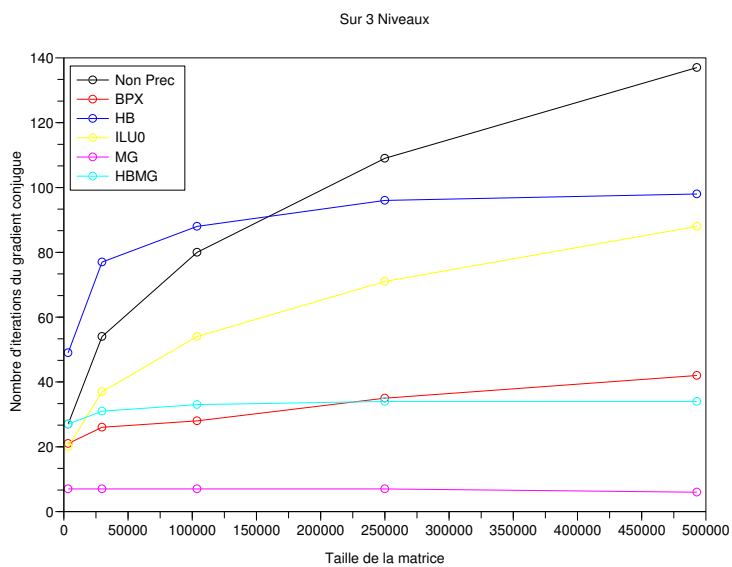


FIG. 33 – Comparaison avec 3 Niveaux. Elément 3D-Q1.

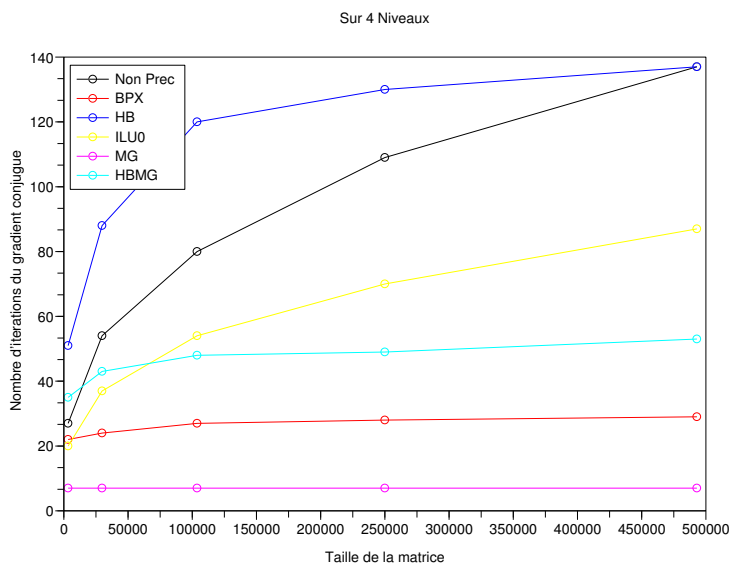


FIG. 34 – Comparaison avec 4 Niveaux. Elément 3D-Q1.

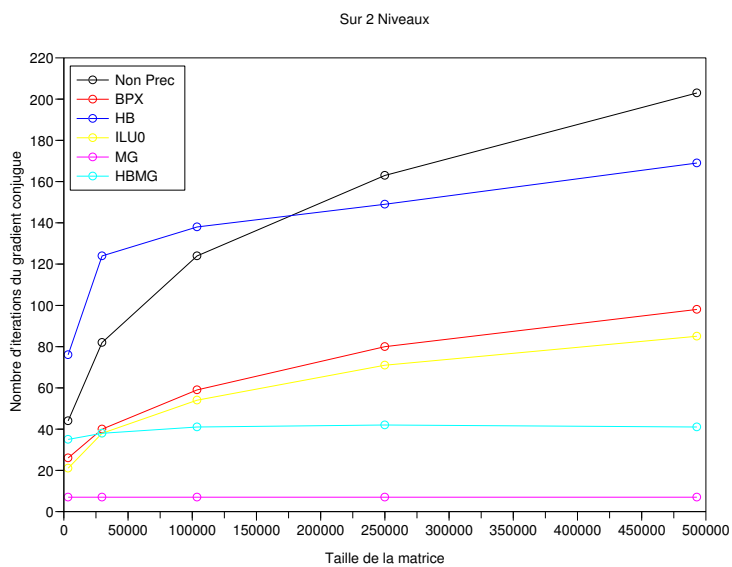


FIG. 35 – Comparaison avec 2 Niveaux. Elément 3D-Q2.

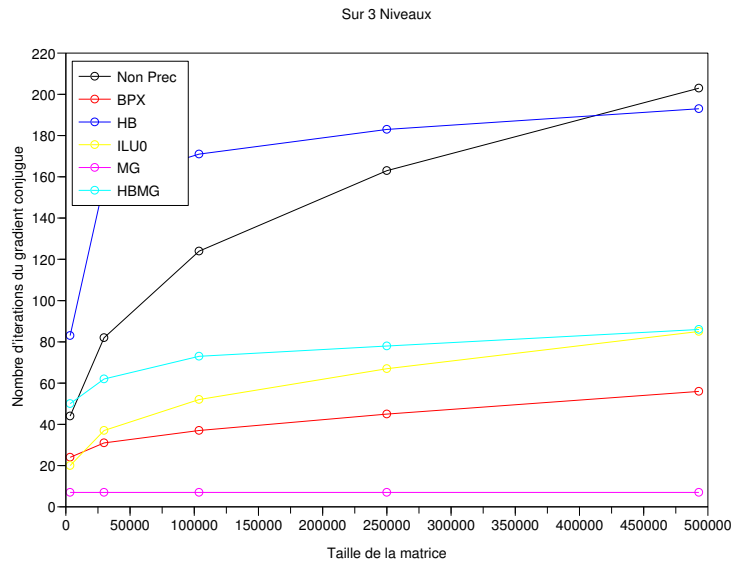


FIG. 36 – Comparaison avec 3 Niveaux. Élément 3D-Q2.

Les résultats sont sensiblement différents des résultats observés en dimension deux. Comme la théorie prédit l'efficacité des préconditionneurs HB et HBMG se dégrade en dimension trois. Cependant lorsque que l'on a un nombre de niveaux et un nombre d'inconnues suffisant l'ordre d'efficacité des préconditionneurs est le même qu'en dimension deux : les méthodes multigrilles MG puis HBMG, les préconditionneurs additifs BPX puis HB.

Conclusion

Les méthodes multiniveaux permettent d'obtenir, dans la résolution d'un système linéaire associé à une discrétisation éléments finis, un nombre d'itérations indépendant du niveau de raffinement du maillage. Ceci fait des méthodes multiniveaux, et en particulier des méthodes multigrilles, un outil très efficace pour la résolution de grand système numérique.

Références

- [1] Alfio Quarteroni and Alberto Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Berlin, 1997.
- [2] Dietrich Braess. *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, 2001.
- [3] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [4] Harry Yserentant. Two preconditioners based on the multi-level splitting of finite element spaces. *Numerische Mathematik*, 58 :163–184, 1990.
- [5] Jinchao Xu. An introduction to multilevel methods. In *Wavelets, Multilevel Methods and Elliptic PDEs*, 1997.
- [6] Harry Yserentant. Old and new convergence proofs for multigrid methods. *Acta Numerica*, pages 285–326, 1993.
- [7] James H. Bramble, Joseph E. Pasciak, and Jinchao Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Mathematics of Computation*, 55(191) :1–22, jul 1990.
- [8] Jinchao Xu and Jinshui Qin. Some remarks on a multigrid preconditioner. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15 :171–184, 1994.