

# Compte rendu des TP matlab

Krell Stella, Minjeaud Sebastian

18 décembre 2006

## 1 TP1, Discrétisation de problèmes elliptiques linéaires 1d

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$  et  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . On cherche à approcher la solution  $u$  du problème suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{xx}(x) + au_x(x) + bu(x) &= f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) &= c, \\ u(1) &= d. \end{cases} \quad (1)$$

### Théorème 1.

Dans  $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ , il existe une unique solution  $u$  vérifiant le problème (1).

#### Démonstration :

Unicité : Méthode d'énergie.

Supposons que  $u$  et  $v$  soient deux solutions de classe  $C^2([0, 1], \mathbb{R})$  du problème (1). La différence  $\psi = u - v$  est alors solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon \psi_{xx}(x) + a\psi_x(x) + b\psi(x) &= 0, & x \in [0, 1], \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi(1) &= 0. \end{cases}$$

On multiplie l'équation par  $\psi$  et on intègre sur  $[0, 1]$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-\varepsilon \psi_{xx}(x) + a\psi_x(x) + b\psi(x)) \psi(x) dx &= 0 \\ \underbrace{\varepsilon}_{>0} \int_0^1 \psi_x^2(x) dx + \underbrace{b}_{\geq 0} \int_0^1 \psi^2(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $\int_0^1 \psi_x^2(x) dx = 0$ , on obtient  $\forall x \in [0, 1], \psi_x(x) = 0$ . Ainsi  $\psi$  est une fonction constante,  $\forall x \in [0, 1], \psi(x) = \psi(0) = 0$ . Finalement,  $u = v$ .

Existence : Méthode de tir. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{xx}(x) + au_x(x) + bu(x) &= f(x), & x \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) &= c, \\ u'(0) &= \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Il admet, d'après le théorème de Cauchy Lipschitz (linéaire), une unique solution globale définie sur  $\mathbb{R}_+$  de classe  $C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  notée  $u_\alpha$ . Notons  $\phi = u_0$  et  $\psi$  l'unique solution (théorème de Cauchy Lipschitz linéaire) du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon \psi_{xx}(x) + a\psi_x(x) + b\psi(x) &= 0, & x \in [0, 1], \\ \psi(0) &= 0, \\ \psi'(0) &= 1. \end{cases}$$

Par unicité,  $u_\alpha = \phi + \alpha\psi$ . On a  $u_\alpha(1) = \phi(1) + \alpha\psi(1)$ . On montre par une méthode d'énergie que  $\psi(1)$  est non nul. On peut alors poser  $\alpha = \frac{d - \phi(1)}{\psi(1)}$ .  $u_{\alpha|_{[0,1]}}$  est la solution du problème (1). ■

**Remarque 1 :** On peut également démontrer ce théorème en passant par une formulation faible.

## Théorème 2.

Principe du maximum :

Notons  $u$  l'unique solution du problème (1).

- Dans le cas  $b > 0$ , on a  $\forall x \in [0, 1], m \leq u(x) \leq M$  avec  $M = \max \left\{ c, d, \frac{1}{b} \max \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}$  et

$$m = \min \left\{ c, d, \frac{1}{b} \min \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}.$$

- Dans le cas  $b = 0$  et sous l'hypothèse  $f \geq 0$ , on a  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq \min(c, d)$  autrement dit le minimum de  $u$  est atteint sur la frontière de  $[0, 1]$ .

### Démonstration :

- Premier cas : Supposons d'abord  $a = b = 0$  et  $f \geq 0$ .

$$-\varepsilon u''(x) = f(x)$$

Soit  $\delta > 0$ , posons  $v_\delta(x) = u(x) - \delta x^2$ .

Soit  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $v_\delta(x_0) = \min\{v_\delta(x), x \in [0, 1]\}$ . Un tel  $x_0$  existe par compacité puisque  $v_\delta$  est continue.

Si  $x_0 \in ]0, 1[$ , alors  $v'_\delta(x_0) = 0$  et  $v''_\delta(x_0) \geq 0$  ie  $u''(x_0) - 2\delta \geq 0$  donc

$$\underbrace{f(x_0)}_{\geq 0} + \underbrace{2\delta\varepsilon}_{>0} \leq 0$$

Contradiction, donc  $x_0 = 0$  ou  $1$  et  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq u(x) - \delta x^2 \geq \min(u(0), u(1) - \delta)$ . Ceci est valable pour tout  $\delta > 0$ , donc  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq \min(u(0), u(1))$ .

- Deuxième cas : Supposons  $a \neq 0, b = 0$  et  $f \geq 0$ .

$$-\varepsilon u''(x) + au'(x) = f(x)$$

Soit  $\delta > 0$ , posons  $v_\delta(x) = u(x) - \delta e^{-ax}$ .

Soit  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $v_\delta(x_0) = \min\{v_\delta(x), x \in [0, 1]\}$ .

Si  $x_0 \in ]0, 1[$ , alors  $v'_\delta(x_0) = 0$  et  $v''_\delta(x_0) \geq 0$ . On a donc  $u'(x_0) = -a\delta e^{-ax_0}$  et par suite

$$\underbrace{-\varepsilon v''_\delta(x_0)}_{\leq 0} - \underbrace{\varepsilon a^2 e^{-ax_0} - a^2 \delta e^{-ax_0}}_{< 0} = f(x_0) \geq 0$$

Contradiction, donc  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq \min(u(0) - \delta, u(1) - \delta e^{-a})$ . Ceci est valable pour tout  $\delta > 0$ , donc  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq \min(u(0), u(1))$ .

- Troisième cas : Supposons  $b > 0$ . Soit  $x_0$  tel que  $u(x_0) = \min\{u(x), x \in [0, 1]\}$ . On différencie deux cas :

Si  $x_0 \in ]0, 1[$ , on a  $u'(x_0) = 0$ ,  $u''(x_0) \geq 0$  et comme  $u$  vérifie (1), on a :

$$u(x_0) = \frac{1}{b} f(x_0) + \frac{\varepsilon}{b} u''(x_0)$$

donc  $u(x_0) \geq \frac{1}{b} f(x_0) \geq m$ , ie  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq m$ .

Si  $x_0 \in \{0, 1\}$ ,  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq u(x_0) \geq m$ .

Dans tous les cas,  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq m$ . ■

**Remarque 2 :** Ce théorème montre le principe de positivité suivant : Si  $c, d, f \geq 0$  alors  $u \geq 0$ .

On a considéré 4 exemples :

1.  $\varepsilon = 1, a = b = c = d = 0, f = 1$ , la solution est  $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

2.  $\varepsilon = 1, a = b = c = d = 0, f(x) = -12x^2 + 12x - 2$ , la solution est  $u(x) = x^2(1-x)^2$

3.  $\varepsilon = 1/4, a = 1, b = 3, c = 1, d = \exp(-2), f = 0$ , la solution est  $u(x) = \exp(-2x)$

4.  $\varepsilon = 1/100, a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, f = 0$ , la solution est  $u(x) = \frac{1}{e^{100} - 1}(e^{100x} - 1)$

L'exemple 4 est un problème raide. La solution exacte est difficile à approcher si  $\varepsilon$  est petit, la variation se fait dans un intervalle très petit (de longueur  $5 * \varepsilon$ ), il faut donc que  $h$  soit très petit. La limite de  $u$  dans le quatrième exemple quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}} - 1}{e^{1/\varepsilon} - 1} \\
 &= \frac{e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \\
 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} &\begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \infty & \text{si } x > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour illustrer le principe du maximum, on trace les solutions  $u$  sur  $[0,1]$  avec  $m$  et  $M$ .

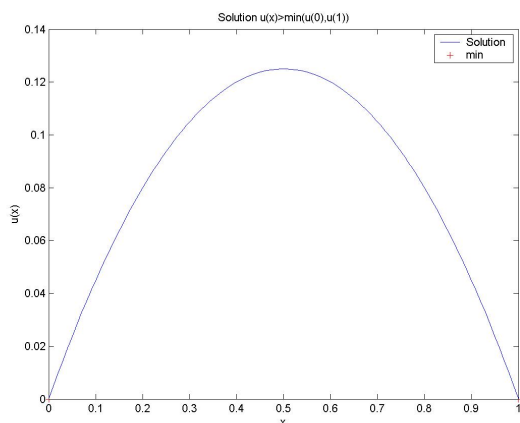


FIG. 1 – Solution pour l'exemple 1

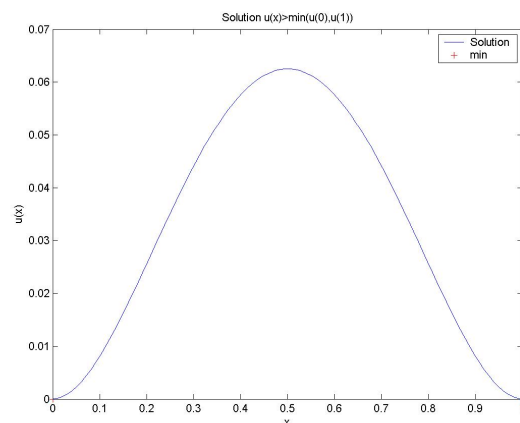


FIG. 2 – Solution pour l'exemple 2

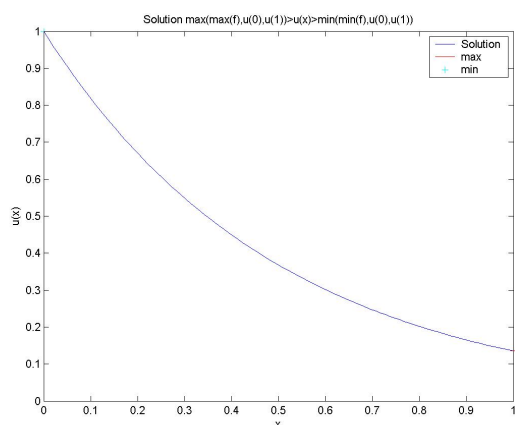


FIG. 3 – Solution pour l'exemple 3

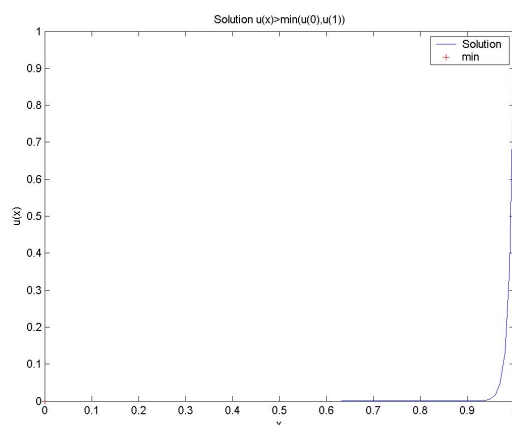


FIG. 4 – Solution pour l'exemple 4

Pour l'exemple 1 et 2, on a  $a = b = 0$ , donc  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq \min(u(0), u(1))$  (figure 1, 2).  
 Pour l'exemple 3, on a  $a, b$  sont non nuls, donc  $\forall x \in [0, 1], M \geq u(x) \geq m$  (figure 3).  
 Pour l'exemple 4, on a  $a = 1, b = 0$ , donc  $\forall x \in [0, 1], u(x) \geq \min(u(0), u(1))$  (figure 4).

## 1.1 Discrétisation par Différences Finies (DF) centrées

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On note  $h = 1/(N + 1)$  et  $x_i = ih, i = 1, \dots, N$ . La discrétisation du problème par différences finies centrées avec un maillage uniforme de pas  $h$  s'écrit :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)u_{i-1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + b\right)u_i + \left(\frac{a}{2h} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_{i+1} = f_i, & , i = 2, \dots, N-1 \\ \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + b\right)u_1 + \left(\frac{a}{2h} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_2 = f_1 + \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)c, \\ -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)u_{N-1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + b\right)u_N = f_N + \left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a}{2h}\right)d. \end{cases} \quad (3)$$

Les inconnues discrètes  $u_1, \dots, u_N$  sont supposées approcher les valeurs de  $u$  aux points  $x_1, \dots, x_N$ .

### Théorème 3.

Supposons l'existence d'une solution, notée  $\{u_j\}_{j \in \{1, \dots, N\}}$ , du système linéaire (3). Sous l'hypothèse  $ah \leq 2\varepsilon$ , on a le principe du maximum discret suivant :

- Dans le cas  $b > 0$ , on a  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, m \leq u_i \leq M$  avec  $M = \max \left\{ c, d, \frac{1}{b} \max \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}$  et

$$m = \min \left\{ c, d, \frac{1}{b} \min \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}.$$

- Dans le cas  $b = 0$  et sous l'hypothèse  $f \geq 0$ , on a  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq \min(c, d)$ .

**Démonstration :** Posons  $u_0 = c$  et  $u_{N+1} = d$ . On a alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\frac{\varepsilon}{h^2}(u_i - u_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{h^2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{a}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f_i - bu_i$$

Soit  $i_0 = \min\{i \in \{0, \dots, N+1\} \text{ tel que } u_i = \min\{u_j\}_{j \in \{0, \dots, N+1\}}\}$ .

- Premier cas : Supposons d'abord  $b = 0$  et  $f \geq 0$ . Si  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , on peut écrire

$$\underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0+1})}_{\leq 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a}{2h}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0-1})}_{< 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)}_{> 0} = \underbrace{f_{i_0}}_{\geq 0}$$

Contradiction, donc  $i_0 = 0$  ou  $N+1$  et par suite  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq \min(c, d)$ .

- Deuxième cas : Supposons  $b > 0$ . Si  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , on peut écrire

$$\underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0+1})}_{\leq 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{a}{2h}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0-1})}_{< 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)}_{> 0} = f_{i_0} - bu_{i_0}$$

donc  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq \frac{1}{b}f_{i_0} \geq m$ .

Si  $i_0 = 0$  ou  $N+1$  alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq m$ . ■

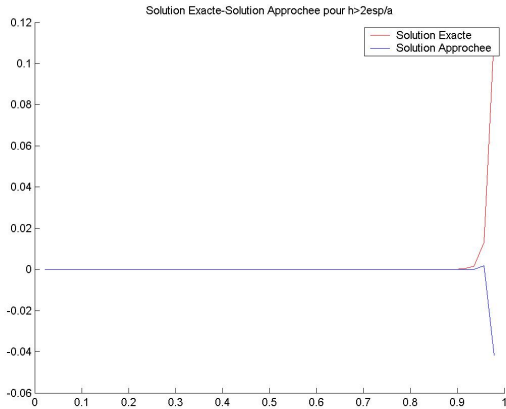


FIG. 5 -  $h > \frac{2\varepsilon}{a}$ ,  $N = 45$  (ex4) par DF

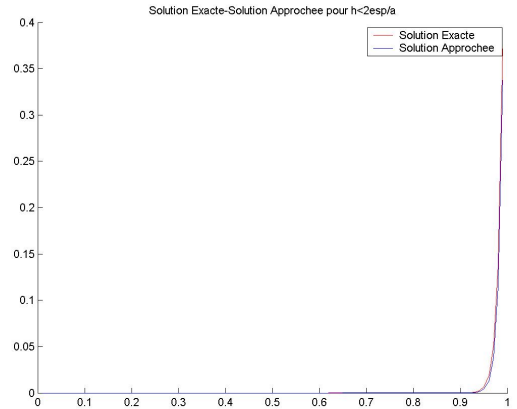


FIG. 6 -  $h \leq \frac{2\varepsilon}{a}$ ,  $N = 100$  (ex4) par DF

On illustre le principe du maximum discret pour l'exemple 4 (la solution exacte est toujours positive) sous les conditions  $h > \frac{2\varepsilon}{a}$  figure 5 et  $h \leq \frac{2\varepsilon}{a}$  figure 6.

**Théorème 4.**

*Existence et unicité de la solution discrète :*  
 Sous l'hypothèse  $ah \leq 2\varepsilon, \forall F \in \mathbb{R}^N$ , il existe un unique vecteur  $u = (u_1, \dots, u_N)'$  solution de  $Au = F$  où  $A$  est la matrice associée au système linéaire (3).

**Démonstration :** Le principe du maximum discret ci-dessus avec  $c = d = 0$  permet d'écrire ( $Au \geq 0 \implies u \geq 0$ ). Soit  $u$  tel que  $Au = 0$ , on a  $-Au = A(-u) \geq 0$  donc  $-u \geq 0$  et  $Au \geq 0$  donc  $u \geq 0$  donc  $u = 0$ . La matrice  $A$  est inversible. ■

La solution approchée  $u = (u_1, \dots, u_N)'$  n'existe pas toujours. En effet si  $\varepsilon = 0, a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, f = 0$ , le schéma DF :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2h}u_{i-1} + \frac{1}{2h}u_{i+1} = 0, & , i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{1}{2h}u_2 = 0, \\ -\frac{1}{2h}u_{N-1} = -\frac{1}{2h}. \end{cases}$$

Si  $N = 2p$ , on obtient  $u_{2i} = 0$  et  $u_{2i+1} = 1$ . Si  $N = 2p + 1$ , on n'a pas de solution.

On applique le schéma (3) des différences finies à nos 4 exemples (figure 7, 8, 9, 10) sous l'hypothèse  $ah \leq 2\varepsilon$ .

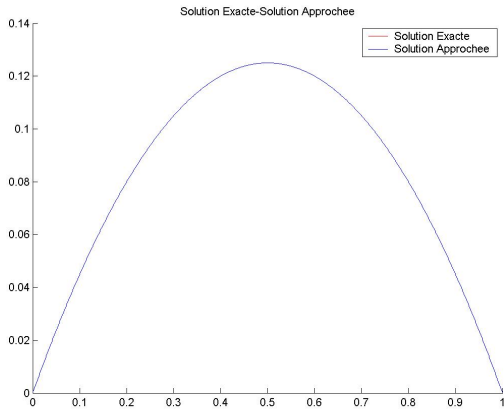


FIG. 7 – Solution exacte-approchée par DF pour ex1

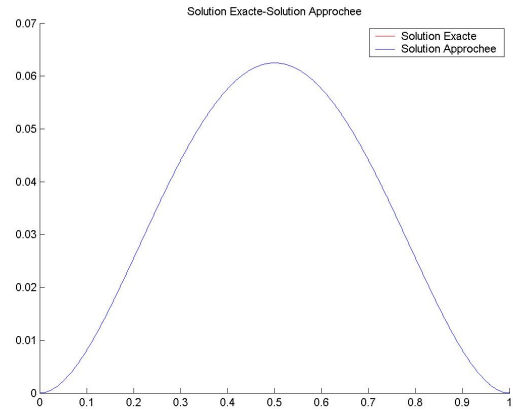


FIG. 8 – Solution exacte-approchée par DF pour ex2

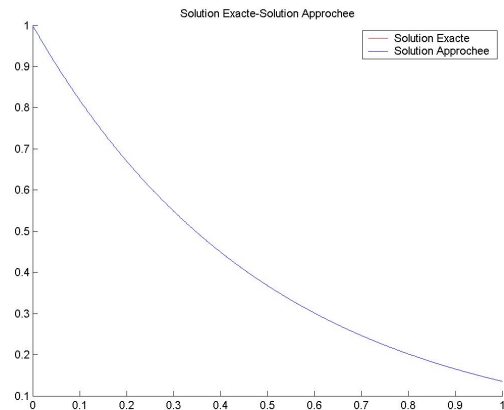


FIG. 9 – Solution exacte-approchée par DF pour ex3

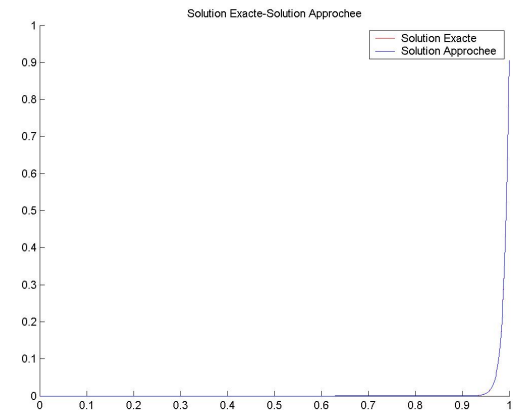


FIG. 10 – Solution exacte-approchée par DF pour ex4

## Théorème 5.

*Ordre de consistance :*

*Le schéma différence finie centrée (3) est consistant d'ordre 2.*

**Démonstration :** En effet, en faisant le développement de Taylor de  $u$  :

$\exists \theta_1, \theta_3 \in [x_i, x_{i+1}]$  et  $\theta_2, \theta_4 \in [x_{i-1}, x_i]$  tels que

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta_1)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\theta_2)$$

On obtient l'erreur de consistance  $R_i$  :

$$\begin{aligned} R_i &= -\varepsilon u_{xx}(x_i) + au_x(x_i) + bu(x_i) - \frac{\varepsilon}{h^2}(2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})) - \frac{a}{2h}(u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})) - bu(x_i) \\ &= \frac{\varepsilon h^2}{24}(u^{(4)}(\theta_1) + u^{(4)}(\theta_2)) - \frac{ah^2}{12}(u^{(3)}(\theta_3) + u^{(3)}(\theta_4)) \\ |R_i| &\leq \left( \frac{\varepsilon}{12} \|u^{(4)}\|_\infty + \frac{a}{6} \|u^{(3)}\|_\infty \right) h^2 \end{aligned}$$

Pour le premier exemple (figure 11), on obtient une erreur numérique de l'ordre de l'erreur machine. C'est dû au fait que la solution exacte est un polynôme d'ordre deux et donc que le schéma est exact. Pour les autres exemples (figure 12, 13 et 14), on obtient une erreur d'ordre 2.

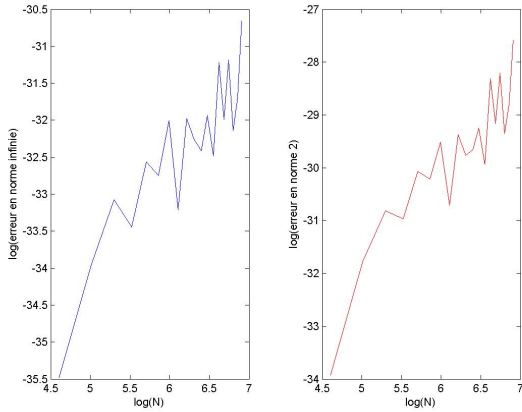


FIG. 11 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 1 pour DF

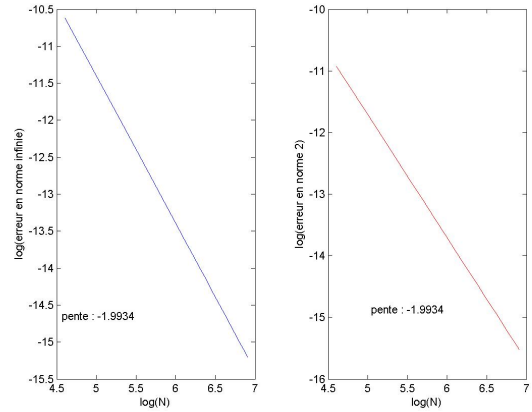


FIG. 12 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 2 par DF

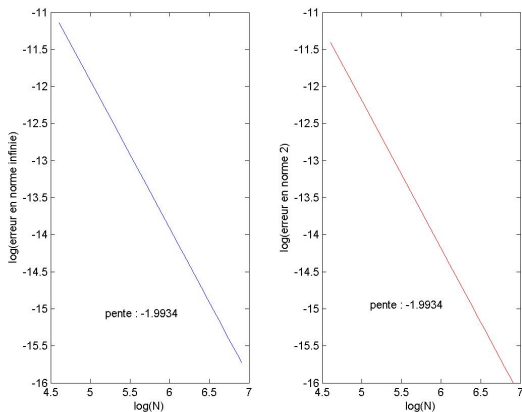


FIG. 13 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 3 par DF

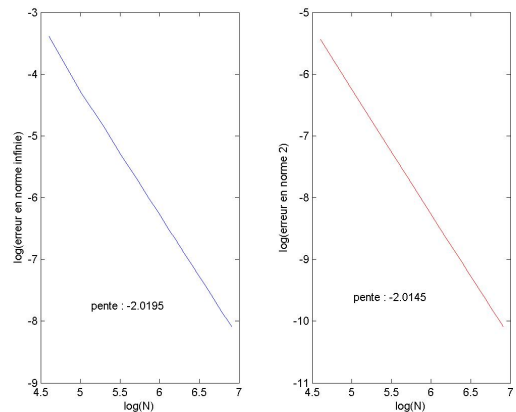


FIG. 14 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 4 par DF

Bilan : Le schéma différence finie centrée (3) est consistant d'ordre 2 mais il ne vérifie pas le principe du maximum pour tout  $h > 0$ .

## 1.2 Discrétisation par Volumes Finis Centrés (VFC)

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $x_{i+1/2} = ih, i = 1, \dots, N$ ,  $x_i = ih - h/2, i = 1, \dots, N$  et  $h_i = h$ , pour  $i = 1, \dots, N$  et  $h_0 = h_{N+1} = \frac{h}{2}$ .

On intègre l'équation sur une maille  $M_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  :

$$-\varepsilon u'(x_{i+1/2}) + \varepsilon u'(x_{i-1/2}) + au(x_{i+1/2}) - au(x_{i-1/2}) + b \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx = hf_i, \text{ pour } i = 1, \dots, N$$

où  $f_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx$ .

On note  $u_1, \dots, u_N$  les inconnues discrètes approchant les valeurs de  $u$  aux points  $x_1, \dots, x_N$ . Pour approcher la solution  $u$  du problème, on propose le schéma numérique suivant :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh u_i = hf_i, i = 1, \dots, N$$

avec  $(F_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$  donné par les expressions suivantes :

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + a \frac{u_{i+1} + u_i}{2}, & i = 1, \dots, N-1 \\ -2\varepsilon \frac{u_1 - c}{h} + ac \\ -2\varepsilon \frac{d - u_N}{h} + ad \end{cases}$$

Le schéma numérique donne un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right) u_{i-1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + b\right) u_i + \left(\frac{a}{2h} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right) u_{i+1} = f_i, & i = 2, \dots, N-1 \\ \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{2h}\right) u_1 + \left(\frac{a}{2h} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right) u_2 = f_1 + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right) c, \\ -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{2h}\right) u_{N-1} + \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b - \frac{a}{2h}\right) u_N = f_N - \left(\frac{a}{h} - \frac{2\varepsilon}{h^2}\right) d. \end{cases} \quad (4)$$

### **Théorème 6.**

*Existence et unicité de la solution discrète :*

$\forall F \in \mathbb{R}^N$ , il existe un unique vecteur  $u = (u_1, \dots, u_N)'$  solution de  $Au = F$  où  $A$  est la matrice associée au système linéaire (4).

**Démonstration :** On suppose que  $c = d = f = 0$  et on pose  $u_0 = u_{N+1} = 0$ . on multiplie le schéma par  $u_i$  et on somme pour  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh u_i &= 0 \\ -\sum_{i=0}^N F_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) + bh \sum_{i=1}^N u_i^2 &= 0 \\ \frac{\varepsilon}{h} \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1} - u_i)^2 + \frac{2\varepsilon}{h} (u_1^2 + u_N^2) - \underbrace{\frac{a}{2} \sum_{i=0}^N (u_{i+1} - u_i)(u_{i+1} + u_i)}_{=0} + bh \sum_{i=1}^N u_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tous les termes sont positifs donc  $\forall i = 1, \dots, N, u_i = 0$ . Donc  $A$  est inversible. ■

On applique le schéma (4) des volumes finies centrés à nos 4 exemples (figures 15, 16, 17, 18).

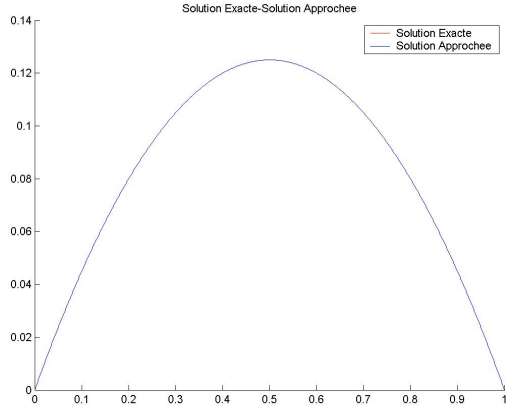


FIG. 15 – Solution exacte-approchée par VFC pour ex1

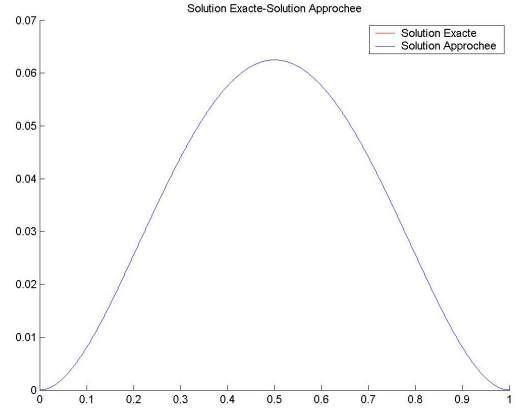


FIG. 16 – Solution exacte-approchée par VFC pour ex2

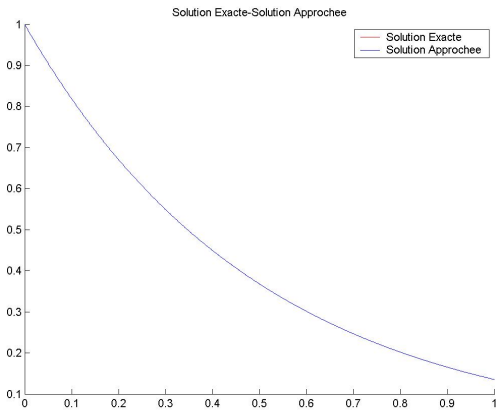


FIG. 17 – Solution exacte-approchée par VFC pour ex3

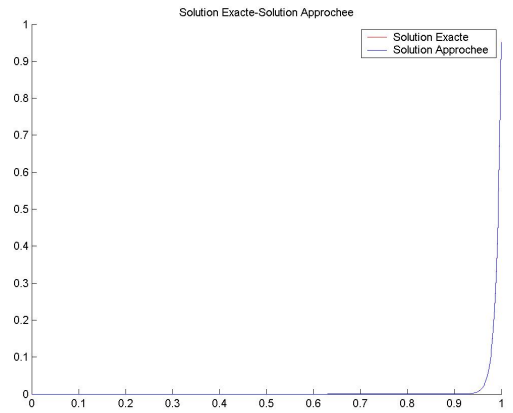


FIG. 18 – Solution exacte-approchée par VFC pour ex4

### Théorème 7.

*Convergence :*

Le schéma volume fini centré (4) est convergent d'ordre  $\frac{3}{2}$ .

On pose  $e_i = u(x_i) - u_i$ , pour  $i = 1, \dots, N$  et  $e_0 = e_{N+1} = 0$ .

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} \leq Ch^3 \text{ quand } h \text{ est petit}$$

$$|e_i| \leq Ch^{3/2}$$

**Démonstration :** Consistance : On pose  $\bar{u}_i = u(x_i)$ , pour  $i = 1, \dots, N$

$$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + bh\bar{u}_i = hf_i$$

avec  $(\bar{F}_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$  donné par les expressions suivantes :

$$\bar{F}_{i+1/2} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} + a \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2} + R_{i+1/2}, & i = 1, \dots, N-1 \\ -2\varepsilon \frac{\bar{u}_1 - c}{h} + ac + R_{1/2} \\ -2\varepsilon \frac{d - \bar{u}_N}{h} + ad + R_{N+1/2} \end{cases}$$

Pour  $i = 1, \dots, N-1$ , on a :  $\exists \theta_1, \theta_3 \in [x_{i+1/2}; x_{i+1}]$  et  $\theta_2, \theta_4 \in [x_i; x_{i+1/2}]$  tels que



$$\begin{aligned}
R_{i+1/2} &= -\varepsilon \left( u'(x_{i+1/2}) - \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} \right) + a \left( u(x_{i+1/2}) - \frac{\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_i}{2} \right) \\
&= \frac{\varepsilon h^2}{48} \left( u^{(3)}(\theta_1) + u^{(3)}(\theta_2) \right) - \frac{ah^2}{4} \left( u''(\theta_3) + u''(\theta_4) \right) \\
|R_{i+1/2}| &\leq Ch^2
\end{aligned}$$

Pour  $i = 0$ , on a :  $\exists \theta_1 \in [0; x_1]$  tel que

$$\begin{aligned}
R_{1/2} &= -\varepsilon \left( u'(0) - 2 \frac{\bar{u}_1 - u(0)}{h} \right) + a(u(0) - u(0)) \\
&= \frac{\varepsilon h}{4} u''(\theta_1) \\
|R_{1/2}| &\leq Ch
\end{aligned}$$

De même pour  $i = N$  :

$$|R_{N+1/2}| \leq Ch$$

Erreur : On a pour  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + bh\bar{u}_i &= hf_i \\
F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh u_i &= hf_i
\end{aligned}$$

Donc  $e_i$  vérifie :

$$G_{i+1/2} - G_{i-1/2} + bhe_i = 0$$

avec  $G_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}$ . En reprenant les calculs faits dans l'existence et l'unicité des  $u_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
G_{i+1/2} - G_{i-1/2} + bhe_i &= 0 \\
\varepsilon \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} + bh \sum_{i=1}^N e_i^2 &= \sum_{i=0}^N R_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i) \\
\varepsilon \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} + 2 \frac{\varepsilon}{h} e_1^2 + 2 \frac{\varepsilon}{h} e_N^2 + bh \sum_{i=1}^N e_i^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} R_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i) + R_{1/2} e_1 - R_N e_N \\
\varepsilon \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h} + 2 \frac{\varepsilon}{h} e_1^2 + 2 \frac{\varepsilon}{h} e_N^2 &\leq |R_{1/2}| |e_1| + |R_N| |e_N| + Ch^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(e_{i+1} - e_i) \sqrt{h_i}}{\sqrt{h_i}} \\
&\leq \frac{h}{4\varepsilon} |R_{1/2}|^2 + \frac{\varepsilon}{h} e_1^2 + \frac{h}{4\varepsilon} |R_N|^2 + \frac{\varepsilon}{h} e_N^2 + Ch^2 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(e_{i+1} - e_i) \sqrt{h_i}}{\sqrt{h_i}} \\
\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} &\leq \frac{h^3}{4\varepsilon} C + \frac{h^3}{4\varepsilon} C + Ch^2 \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} \right)^{1/2} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^N h_i \right)^{1/2}}_{\leq 1} \\
\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} &\leq C \left( h^3 + h^2 \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} \right)^{1/2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} Ch^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} + Ch^3 \\
&\leq C(h^4 + 2h^3) \\
\left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} \right)^{1/2} &\leq Ch^{3/2} \text{ quand } h \text{ est petit} \\
\sum_{i=0}^N (e_{i+1} - e_i)^2 &\leq Ch^4
\end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned}
|e_i| &\leq \left( \sum_{j=0}^N (e_{j+1} - e_j)^2 \right)^{1/2} \sqrt{N+1} \\
&\leq Ch^{3/2}
\end{aligned}$$

On a vu que théoriquement on a une erreur d'ordre  $\frac{3}{2}$ , mais numériquement pour nos exemples (figures 19, 20, 21 et 22) on trouve une erreur d'ordre 2. ■

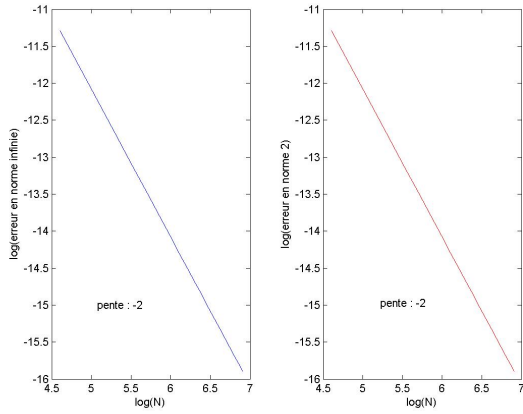


FIG. 19 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 1 par VFC

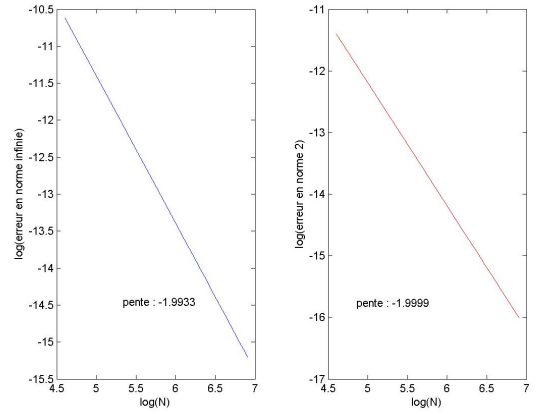


FIG. 20 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 2 par VFC

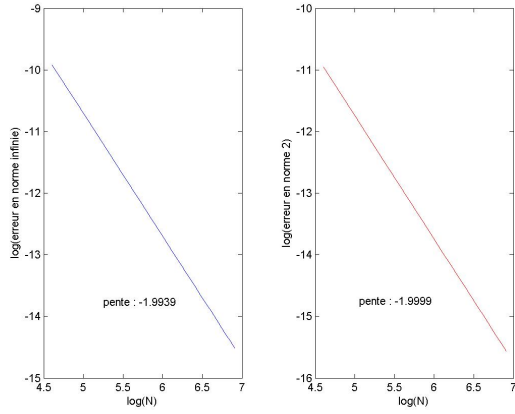


FIG. 21 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 3 par VFC

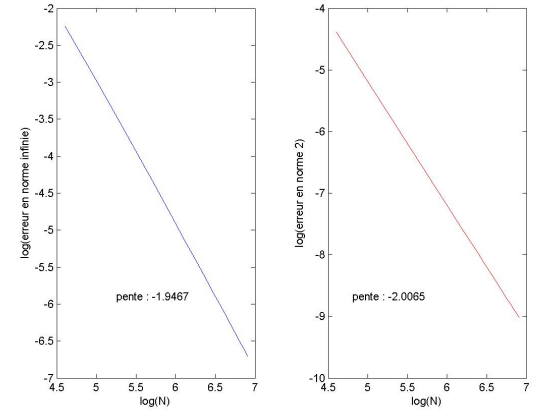


FIG. 22 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 4 par VFC

### **Théorème 8.**

Sous l'hypothèse  $ah \leq 2\varepsilon$ , on a le principe du maximum discret suivant :

– Dans le cas  $b > 0$ , on a  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, m \leq u_i \leq M$  avec  $M = \max \left\{ c, d, \frac{1}{b} \max \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}$  et

$$m = \min \left\{ c, d, \frac{1}{b} \min \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}.$$

– Dans le cas  $b = 0$  et sous l'hypothèse  $f \geq 0$ , on a  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq \min(c, d)$ .

**Démonstration :** Posons  $u_0 = c$  et  $u_{N+1} = d$ . On a alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\frac{\varepsilon}{h_i^2}(u_i - u_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{h_i^2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{a}{2h_i}(u_{i+1} - u_{i-1}) = f_i - bu_i$$

Soit  $i_0 = \min\{i \in \{0, \dots, N+1\} \text{ tel que } u_i = \min\{u_j\}_{j \in \{0, \dots, N+1\}}\}$ .

– Premier cas : Supposons d'abord  $b = 0$  et  $f \geq 0$ .

Si  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , on peut écrire

$$\underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0+1})}_{\leq 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2} - \frac{a}{2h_{i_0}}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0-1})}_{< 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2} + \frac{a}{2h_{i_0}}\right)}_{> 0} = \underbrace{f_{i_0}}_{\geq 0}$$

Contradiction, donc  $i_0 = 0$  ou  $N+1$  et par suite  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq \min(c, d)$ .

– Deuxième cas : Supposons  $b > 0$ .

Si  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , on peut écrire

$$\underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0+1})}_{\leq 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2} - \frac{a}{2h_{i_0}}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0-1})}_{< 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2} + \frac{a}{2h_{i_0}}\right)}_{> 0} = f_{i_0} - bu_{i_0}$$

donc  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $u_i \geq u_{i_0} \geq \frac{1}{b}f_{i_0} \geq m$ .

Si  $i_0 = 0$  ou  $N + 1$  alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $u_i \geq u_{i_0} \geq m$ . ■

On illustre le principe du maximum discret pour l'exemple 4 (la solution exacte est toujours positive) sous les conditions  $h > \frac{2\varepsilon}{a}$  figure 23 et  $h \leq \frac{2\varepsilon}{a}$  figure 24.

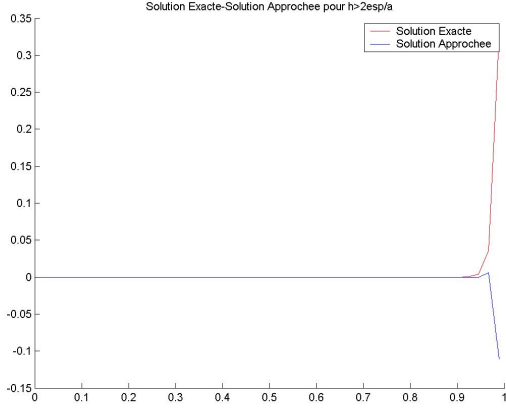


FIG. 23 –  $h > \frac{2\varepsilon}{a}$ ,  $N = 45$  (ex4) par VFC

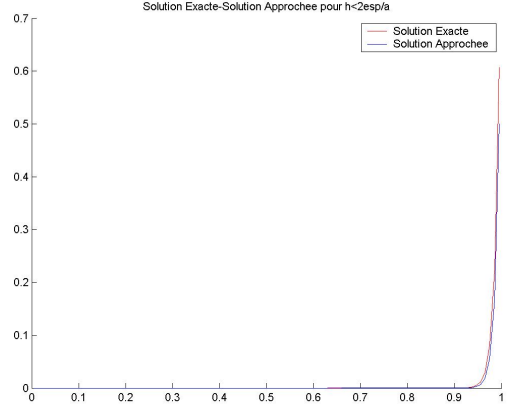


FIG. 24 –  $h \leq \frac{2\varepsilon}{a}$ ,  $N = 100$  (ex4) par VFC

Bilan : on a un schéma d'ordre  $\frac{3}{2}$  théorique, numériquement on montre un ordre 2 et on n'a pas le principe du maximum pour tout  $h > 0$ .

### 1.3 Discrétisation par Volumes Finis Décentrés (VFDC)

Pour approcher la solution  $u$  du problème, on propose le schéma numérique suivant (avec les mêmes notations que la partie VF centrés) :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh u_i = h f_i, i = 1, \dots, N$$

avec  $(F_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$  donné par les expressions suivantes :

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + a u_i, & i = 1, \dots, N-1 \\ -2\varepsilon \frac{u_1 - c}{h} + a c \\ -2\varepsilon \frac{d - u_N}{h} + a u_N \end{cases}$$

Le schéma numérique donne un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right) u_{i-1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h} + b\right) u_i - \frac{\varepsilon}{h^2} u_{i+1} = f_i, & , i = 2, \dots, N-1 \\ \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{h}\right) u_1 - \frac{\varepsilon}{h^2} u_2 = f_1 + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right) c, \\ -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right) u_{N-1} + \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{h}\right) u_N = f_N + \frac{2\varepsilon}{h^2} d. \end{cases} \quad (5)$$

### Théorème 9.

*Existence et unicité de la solution discrète :*

$\forall F \in \mathbb{R}^N$ , il existe un unique vecteur  $u = (u_1, \dots, u_N)'$  solution de  $Au = F$  où  $A$  est la matrice associée au système linéaire (5).

**Démonstration :** On suppose que  $c = d = f = 0$  et on pose  $u_0 = u_{N+1} = 0$ .  
on multiplie le schéma par  $u_i$  et on somme pour  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned}
 F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bhu_i &= 0 \\
 - \sum_{i=0}^N F_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) + bh \sum_{i=1}^N u_i^2 &= 0 \\
 \frac{\varepsilon}{h} \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1} - u_i)^2 + \frac{2\varepsilon}{h} (u_1^2 + u_N^2) - a \underbrace{\sum_{i=1}^N (u_{i+1} - u_i)u_i}_{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (u_{i+1} - u_i)^2} + bh \sum_{i=1}^N u_i^2 &= 0 \\
 \sum_{i=1}^{N-1} (u_{i+1} - u_i)^2 \left( \frac{\varepsilon}{h} + \frac{a}{2} \right) + (u_1^2 + u_N^2) \left( \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{a}{2} \right) + bh \sum_{i=1}^N u_i^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Tous les termes sont positifs donc  $\forall i = 1, \dots, N, u_i = 0$ . Donc  $A$  est inversible. ■

On n'applique le schéma (5) des volumes finis décentrés que pour les exemples 3 et 4 (figures 25, 26), car  $a \neq 0$ , sinon on a le même schéma que volumes finis centrés.

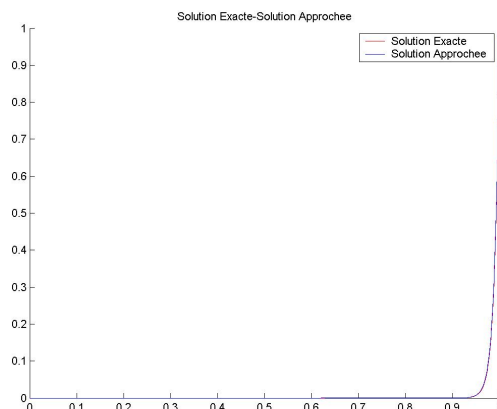
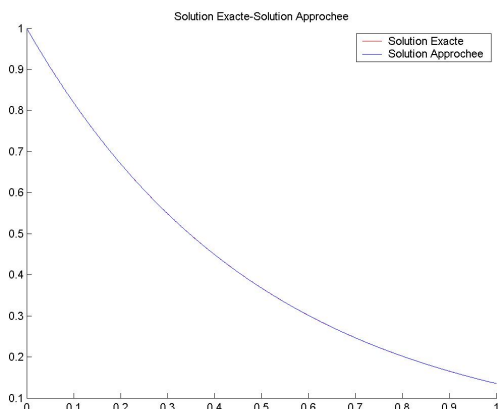


FIG. 25 – Solution exacte-approchée par VFDC pour ex3    FIG. 26 – Solution exacte-approchée par VFDC pour ex4

### Théorème 10.

*Convergence :*

*Le schéma volume fini décentré (5) est convergent d'ordre 1.*

*On pose  $e_i = u(x_i) - u_i$ , pour  $i = 1, \dots, N$  et  $e_0 = e_{N+1} = 0$ .*

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} &\leq Ch^2 \\
 |e_i| &\leq Ch
 \end{aligned}$$

**Démonstration :** Consistance : On pose  $\bar{u}_i = u(x_i)$  pour  $i = 1, \dots, N$

$$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + bh\bar{u}_i = hf_i$$

avec  $(\bar{F}_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$  donné par les expressions suivantes :

$$\bar{F}_{i+1/2} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} + a\bar{u}_i + R_{i+1/2}, & i = 1, \dots, N-1 \\ -2\varepsilon \frac{\bar{u}_1 - c}{h} + ac + R_{1/2} \\ -2\varepsilon \frac{d - \bar{u}_N}{h} + a\bar{u}_N + R_{N+1/2} \end{cases}$$

Pour  $i = 1, \dots, N-1$ , on a  $\exists \theta_1 \in [x_{i+1/2}; x_{i+1}]$  et  $\theta_2, \theta_3 \in [x_i; x_{i+1/2}]$  tels que

$$\begin{aligned} R_{i+1/2} &= -\varepsilon \left( u'(x_{i+1/2}) - \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h} \right) + a(u(x_{i+1/2}) - \bar{u}_i) \\ &= \frac{\varepsilon h^2}{48} \left( u^{(3)}(\theta_1) + u^{(3)}(\theta_2) \right) + \frac{ah}{2} u'(\theta_3) \\ |R_{i+1/2}| &\leq Ch \end{aligned}$$

Pour  $i = 0$ , on a :  $\exists \theta_1 \in [0; x_1]$  tel que

$$\begin{aligned} R_{1/2} &= -\varepsilon \left( u'(0) - 2 \frac{\bar{u}_1 - u(0)}{h} \right) \\ &= \frac{\varepsilon h}{4} u''(\theta_1) \\ |R_{1/2}| &\leq Ch \end{aligned}$$

De même pour  $i = N$  :

$$|R_{N+1/2}| \leq Ch$$

On obtient pour  $i = 0, \dots, N$  :  $|R_{i+1/2}| \leq Ch$ .

Erreur : On a pour  $i = 1, \dots, N$  :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + bh\bar{u}_i &= hf_i \\ F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh u_i &= hf_i \end{aligned}$$

Donc  $e_i$  vérifie :

$$G_{i+1/2} - G_{i-1/2} + bhe_i = 0$$

avec  $G_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}$ . En reprenant les calculs faits dans l'existence et l'unicité des  $u_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} + \frac{a}{2} \sum_{i=0}^N (e_{i+1} - e_i)^2 + bh \sum_{i=1}^N e_i^2 &= \sum_{i=0}^N R_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i) \\ &\leq Ch \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i) \sqrt{h_i}}{\sqrt{h_i}} \\ &\leq Ch \left( \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_i} \right)^{1/2} \underbrace{\left( \sum_{i=0}^N h_i \right)^{1/2}}_{\leq 1} \\ \sum_{i=0}^N (e_{i+1} - e_i)^2 &\leq Ch^3 \end{aligned}$$

On a encore

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq \left( \sum_{j=0}^N (e_{j+1} - e_j)^2 \right)^{1/2} \sqrt{N+1} \\ &\leq Ch \end{aligned}$$

■

On trouve numériquement l'ordre théorique, ie 1, pour nos exemples 3 et 4 (figures 27, 28)

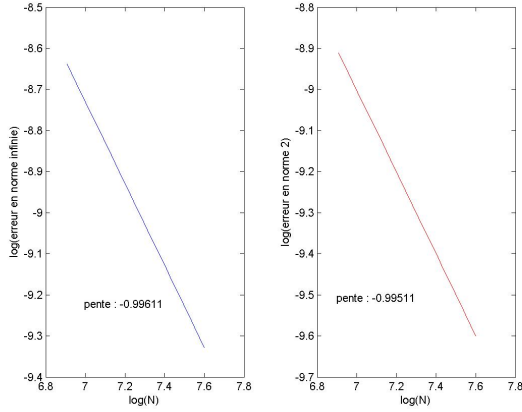


FIG. 27 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 3 par VFDC

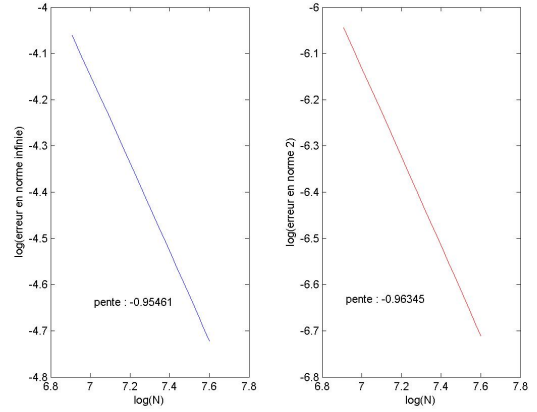


FIG. 28 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  pour l'exemple 4 par VFDC

### Théorème 11.

On a le principe du maximum discret suivant :

- Dans le cas  $b > 0$ , on a  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, m \leq u_i \leq M$  avec  $M = \max \left\{ c, d, \frac{1}{b} \max \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}$  et  $m = \min \left\{ c, d, \frac{1}{b} \min \{f(x), x \in [0, 1]\} \right\}$ .
- Dans le cas  $b = 0$  et sous l'hypothèse  $f \geq 0$ , on a  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq \min(c, d)$ .

**Démonstration :** Posons  $u_0 = c$  et  $u_{N+1} = d$ . On a alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\frac{\varepsilon}{h_i^2}(u_i - u_{i+1}) + \frac{\varepsilon}{h_i^2}(u_i - u_{i-1}) + \frac{a}{h_i}(u_i - u_{i-1}) = f_i - bu_i$$

Soit  $i_0 = \min\{i \in \{0, \dots, N+1\} \text{ tel que } u_i = \min\{u_j\}_{j \in \{0, \dots, N+1\}}\}$ .

– Premier cas : Supposons d'abord  $b = 0$  et  $f \geq 0$ .

Si  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , on peut écrire

$$\underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0+1})}_{\leq 0} \underbrace{\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2}}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0-1})}_{< 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2} + \frac{a}{h_{i_0}}\right)}_{> 0} = \underbrace{f_{i_0}}_{\geq 0}$$

Contradiction, donc  $i_0 = 0$  ou  $N+1$  et par suite  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq \min(c, d)$ .

– Deuxième cas : Supposons  $b > 0$ .

Si  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ , on peut écrire

$$\underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0+1})}_{\leq 0} \underbrace{\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2}}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{i_0} - u_{i_0-1})}_{< 0} \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{h_{i_0}^2} + \frac{a}{h_{i_0}}\right)}_{> 0} = f_{i_0} - bu_{i_0}$$

donc  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq \frac{1}{b}f_{i_0} \geq m$ .

Si  $i_0 = 0$  ou  $N+1$  alors  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, u_i \geq u_{i_0} \geq m$ . ■

Bilan : On a toujours le principe du maximum sans condition sur  $h$  mais on n'a plus de convergence d'ordre 2.

## 1.4 Discrétisation par Volumes Finis décentrés d'ordre 2, sans limiteurs (VFDCSL)

Pour approcher la solution  $u$  du problème, on propose le schéma numérique suivant :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh u_i = h f_i, i = 1, \dots, N$$

avec  $(F_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$  donné par les expressions suivantes :

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + au_i + a\frac{h}{2}p_i, & i = 1, \dots, N-1 \\ -2\varepsilon \frac{u_1 - c}{h} + ac \\ -2\varepsilon \frac{d - u_N}{h} + au_N \end{cases}$$

où  $p_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ ,  $i = 2, \dots, N-1$  et  $p_1 = p_N = 0$ .

Le schéma numérique donne un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues :

$$\begin{cases} \frac{a}{4h}u_{i-2} - \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{5a}{4h}\right)u_{i-1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{3a}{4h} + b\right)u_i + \left(\frac{a}{4h} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_{i+1} = f_i, & i = 3, \dots, N-1 \\ \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{h}\right)u_1 - \frac{\varepsilon}{h^2}u_2 = f_1 + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right)c, \\ -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{5a}{4h}\right)u_1 + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{h}\right)u_2 + \left(\frac{a}{4h} - \frac{\varepsilon}{h^2}\right)u_3 = f_2, \\ \frac{a}{4h}u_{N-2} - \left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right)u_{N-1} + \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{3a}{4h}\right)u_N = f_N + \frac{2\varepsilon}{h^2}d. \end{cases} \quad (6)$$

On n'applique le schéma (6) volumes finis décentré sans limiteurs que pour les exemples 3 et 4 (figures 29, 30), car  $a \neq 0$ , sinon on a le même schéma que volumes finis centrés.

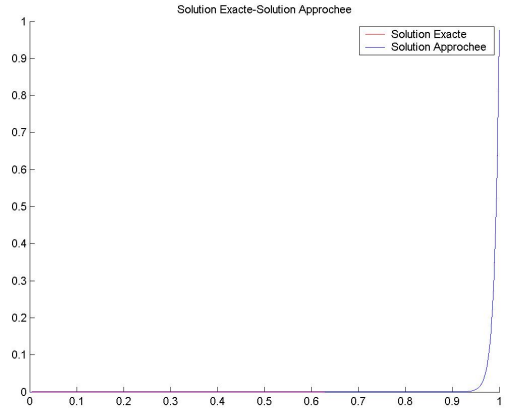
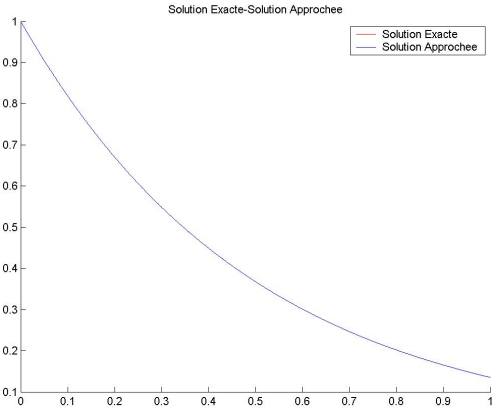


FIG. 29 – Solution exacte-approchée par VFDCSL (ex3)    FIG. 30 – Solution exacte-approchée par VFDCSL (ex4)

Rem : On n'a pas toujours le principe du maximum. Pour l'exemple 4 la solution approchée par volumes finis décentré sans limiteurs n'est pas toujours positive si  $h > \frac{2\varepsilon}{a}$  (figure 31).

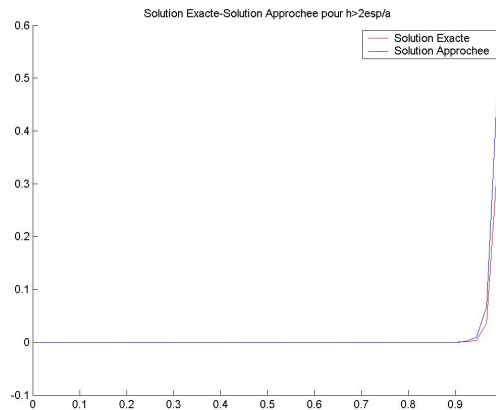


FIG. 31 –  $h > \frac{2\varepsilon}{a}$ ,  $N = 45$  (ex4) par VFDCSL

On obtient numériquement une convergence pour les exemples 3 et 4 approchés par volumes finis décentré sans limiteurs d'ordre 2 (figures 32, 33).

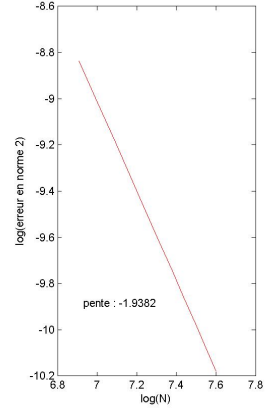
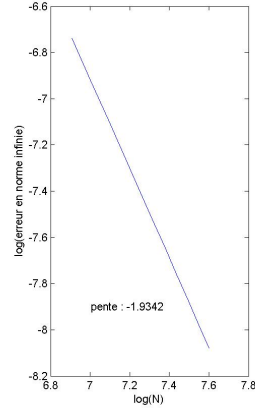
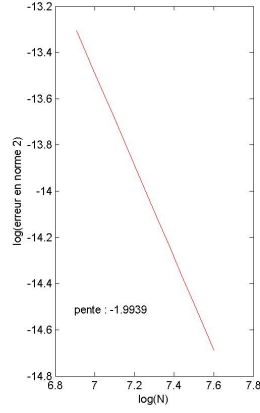
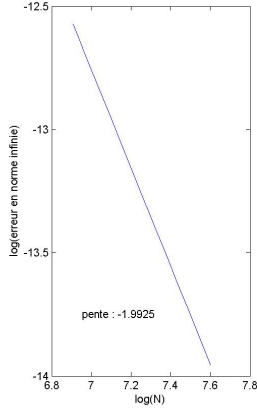


FIG. 32 –  $-\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  par VFDCSL (ex3)

FIG. 33 –  $-\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  par VFDCSL (ex4)

Bilan : on a un schéma d'ordre 2 mais on n'a pas le principe du maximum pour tout  $h > 0$ .

## 1.5 Discrétisation par Volumes Finis décentrés d'ordre 2, avec limiteurs (VFD-CAL)

Pour approcher la solution  $u$  du problème, on propose le schéma numérique suivant :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bhu_i = hf_i, i = 1, \dots, N$$

avec  $(F_{i+1/2})_{i \in \{0, \dots, N\}}$  donné par les expressions suivantes :

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + au_i + a\frac{h}{2}p_i, & i = 1, \dots, N-1 \\ -2\varepsilon \frac{u_1 - c}{h} + ac \\ -2\varepsilon \frac{d - u_N}{h} + au_N \end{cases}$$

où  $p_i = \min\text{mod} \left\{ \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, 2\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, 2\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right\}$ ,  $i = 2, \dots, N-1$  et  $p_1 = p_N = 0$  avec  $\min\text{mod}\{\alpha, \beta, \gamma\} = 0$  si  $\alpha, \beta, \gamma$  n'ont pas tous le même signe et  $\min\text{mod}\{\alpha, \beta, \gamma\} = \text{sign}(\alpha)\min\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$  si  $\alpha, \beta, \gamma$  ont le même signe.

Le schéma numérique donne un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right)u_{i-1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h} + b\right)u_i - \frac{\varepsilon}{h^2}u_{i+1} + \frac{a}{2}(p_i - p_{i-1}) = f_i, & , i = 2, \dots, N-1 \\ \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{h}\right)u_1 - \frac{\varepsilon}{h^2}u_2 = f_1 + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right)c, \\ -\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{a}{h}\right)u_{N-1} + \left(\frac{3\varepsilon}{h^2} + b + \frac{a}{h}\right)u_N + \frac{a}{2}p_{N-1} = f_N + \frac{2\varepsilon}{h^2}d. \end{cases} \quad (7)$$

On n'applique le schéma (7) volumes finis décentrés avec limiteurs que pour les exemples 3 et 4 (figures 34, 35), car  $a \neq 0$ , sinon on a le même schéma que volumes finis centrés.



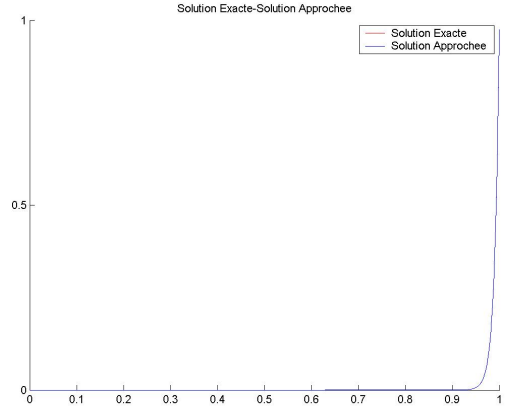
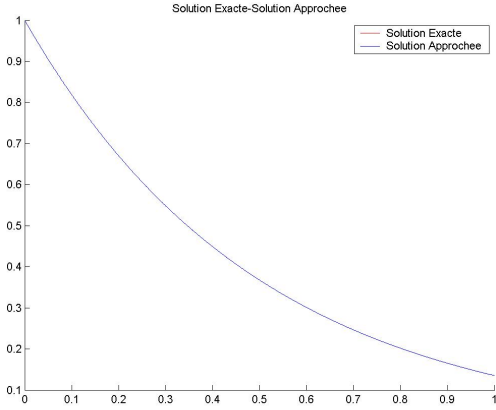


FIG. 34 – Solution exacte-approchée par VFDCAL (ex3)

FIG. 35 – Solution exacte-approchée par VFDCAL (ex4)

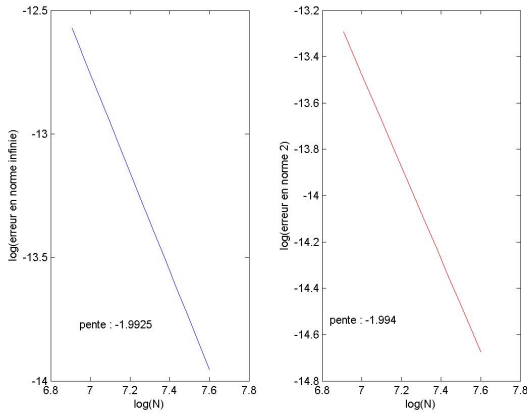


FIG. 36 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  par VFDCAL (ex3)

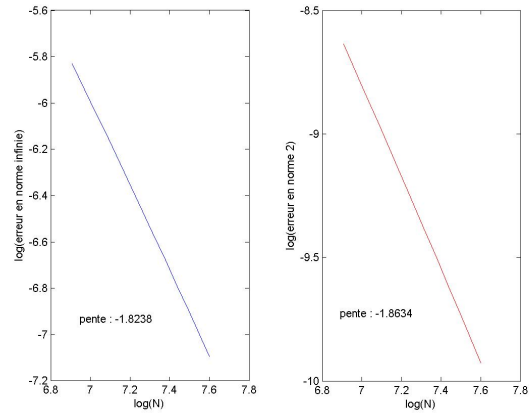


FIG. 37 –  $\ln(\|u(x_i) - u_i\|)$  par VFDCAL (ex4)

On obtient numériquement une convergence d'ordre 2 pour les exemples 3 et 4 approchés par volumes finis décentrés avec limiteurs (figures 36, 37).

Bilan : On a une convergence d'ordre 2, le principe du maximum est vérifié. Mais le schéma n'est pas explicite on doit utiliser une méthode de Newton pour résoudre. Néanmoins la méthode de Newton est très rapide on ne fait que 3 itérations à chaque étape.

## 2 TP2, Discrétisation de problèmes hyperboliques 1d

Soient  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & t \in ]0, +\infty[, x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{p.p dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (8)$$

Dans le cas où  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ , on peut chercher des solutions régulières ie dans  $u \in C^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[; \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[; \mathbb{R})$ . C'est la notion de solution forte ou classique. Cependant de telles solutions n'existent pas toujours.

### Théorème 12.

- Si  $f$  est linéaire ie  $\exists c \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = c$  et  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  alors il existe une unique solution classique au problème (8). Elle est définie par  $\forall t \in [0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, u(x, t) = u_0(x - ct)$ .
- Si  $f'$  non constante alors il existe  $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que (8) n'ait pas de solution classique, ie  $u \in C^1(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[; \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[; \mathbb{R})$ .

La non-existence de solution classique dans le cas général amène à introduire la notion de solution faible (qui a encore un sens même si  $u_0$  n'est pas régulier ie dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ ).

### Définition 1.

Si  $f \in C^1(\mathbb{R}), u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on dit que  $u$  est une solution faible du problème (8) si on a  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  et  $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[; \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} (u(x, t)\varphi_t(x, t) + f(u(x, t))\varphi_x(x, t)) dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0)dx = 0$$

### Théorème 13.

Existence :

- Si  $f$  est linéaire ie  $\exists c \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = c$  et  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  alors il existe une unique solution faible au problème (8). Elle est encore donnée par  $\forall t \in [0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, u(x, t) = u_0(x - ct)$ .
- Dans le cas général, il existe une solution faible mais il n'y a pas nécessairement unicité.

Contre exemple à l'unicité d'une solution faible :

Si  $f(x) = x(3 - 2x)$  et  $u_0(x) = 1$  si  $x < 0$  et  $u_0(x) = 0$  si  $x > 0$ .

Les 3 fonctions suivantes sont solutions faibles du problème (8) :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x < -t \\ -\frac{x-3t}{4t} & \text{si } -t < x < 3t \\ 0 & \text{si } x > 3t \end{cases} \\ u(x, t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2t \\ 0 & \text{si } x > 2t \end{cases} \\ u(x, t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < t \\ -\frac{x-3t}{4t} & \text{si } t < x < 3t \\ 0 & \text{si } x > 3t \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Il faut donc imposer une condition supplémentaire aux solutions pour pouvoir garantir l'unicité. C'est la notion d'entropie.

**Définition 2.**

Si  $f \in C^1(\mathbb{R}), u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , on dit que  $u$  est une solution entropique du problème (8) si on a  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  et  $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[; \mathbb{R}_+), \forall \eta \in C^1(\mathbb{R})$  convexe,  $\phi$  telle que  $\phi' = \eta' f'$  flux d'entropie associé

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} (\eta(u(x, t))\varphi_t(x, t) + \phi(u(x, t))\varphi_x(x, t)) dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x, 0)dx \geq 0$$

On a alors le résultat suivant.

**Théorème 14.**

Existence et unicité d'une solution faible entropique :

Si  $f \in C^1(\mathbb{R}), u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution entropique du problème (8).

Cette solution a les propriétés suivantes :

- Si  $A \leq u_0(x) \leq B$  pour presque tout  $x$  alors  $A \leq u(x, t) \leq B$  pour presque tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .
- Si  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ , alors  $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}), \forall t > 0$  et  $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .
- Si  $v$  est une autre solution entropique avec une autre condition initiale  $v_0 \neq u_0$ , alors  $u_0 \geq v_0 \implies u(x, t) \geq v(x, t)$  pour presque tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

Donnons quelques exemples :

Ecrivons  $f$  sous la forme  $f(x) = \frac{f_1(x)(\alpha + \beta f_2(x))}{f_1(x) + f_2(x)}$  avec  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$   $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions régulières de

$[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f_1(0) = 0, f_1$  croissante,  $f_2(1) = 0$  et  $f_2$  décroissante.

Nous donnons ci dessous les solutions faibles entropiques dans trois cas particuliers pour la donnée initiale  $u_0$  définie par  $u_0(x) = 1$  si  $x < 0$  et  $u_0(x) = 0$  si  $x > 0$ .

1.  $f_1(x) = x, f_2(x) = 1 - x, \alpha = 1$  et  $\beta = 0$  de sorte que  $f(x) = x$ .

La solution de notre problème s'écrit alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - t) \\ = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t \\ 0 & \text{si } x > t \end{cases} \end{cases}$$

2.  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \frac{(1 - x)^2}{4}, \alpha = 1$  et  $\beta = 0$  de sorte que  $f(x) = \frac{4x^2}{4x^2 + (1 - x)^2}$ .

On calcule la dérivée de  $f : f'(x) = \frac{8x(1 - x)}{(4x^2 + (1 - x)^2)^2}$ . Pour  $x \in [0, 1], 0 \leq f'(x) \leq \frac{5}{2}$ . On regarde l'enveloppe concave de  $f$  (figure 38) :  $f$  est concave sur  $[u^*, 1]$  où  $u^*$  vérifie  $f'(u^*)u^* = f(u^*)$ , ie  $u^* = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

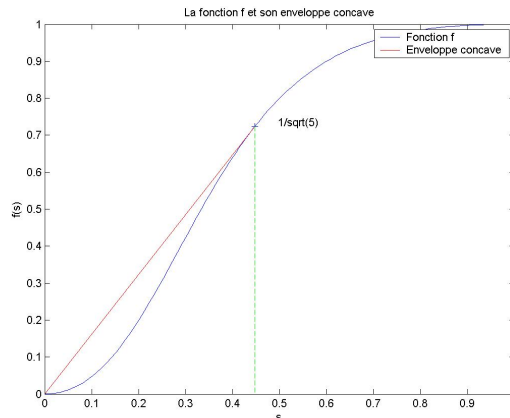


FIG. 38 –  $f$  et son enveloppe concave pour exemple 3

La solution exacte s'écrit alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ "f'^{-1}"\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } 0 < x < tf'(u^*) \\ 0 & \text{si } x > tf'(u^*) \end{cases}$$

3.  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = 1 - x$ ,  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$  de sorte que  $f(x) = x(3 - 2x)$ .  
On calcule la dérivée de  $f$  :  $f'(x) = 3 - 4x$ . Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $-1 \leq f'(x) \leq 3$ .  
La fonction  $f$  concave sur  $[0, 1]$ .  
La solution exacte s'écrit alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -t \\ -\frac{x - 3t}{4t} & \text{si } -t < x < 3t \\ 0 & \text{si } x > 3t \end{cases}$$

Nous cherchons maintenant à approcher numériquement l'unique solution faible entropique  $u$  du problème (8) sur un intervalle de temps  $[0, T]$  où  $T > 0$ .

Pour discrétiser ce problème, on utilise un maillage uniforme de pas  $h = 1/N$  où  $N \in \mathbb{N}^*$  en espace et de pas  $k = T/M$  où  $M \in \mathbb{N}^*$  en temps. On pose  $x_{i+1/2} = ih$ ,  $i = 1, \dots, N$  et  $t_n = nk$ ,  $n = 0, \dots, M$ . Les inconnues discrètes sont notées  $u_i^n$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \{0, \dots, M\}$ . La quantité  $u_i^n$  est supposée approcher les valeurs de  $u(x, t)$  pour  $x \in ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$  et  $t \in ]t_n, t_{n+1}[$ . Les schémas numériques étudiés sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{h}{k} (u_i^{n+1} - u_i^n) + f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n = 0, & i \in \mathbb{Z}, n \in \{0, \dots, M-1\} \\ u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_0(x) dx, & i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La quantité  $f_{i+1/2}^n$  est donc supposée être une approximation de  $f(u(x_{i+1/2}, t_n))$ . On pose  $\lambda = \frac{k}{h}$ .

## 2.1 Schéma centré

On considère le schéma centré : pour  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $f_{i+1/2}^n = \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)}{2}$ .

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left( \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)}{2} \right), \text{ si } i \in \{-M+1, \dots, M\}$$

Ce schéma est inconditionnellement instable.

Dans le cas linéaire (exemple 1), on peut l'écrire pour  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $i \in \{-M+1, \dots, M\}$  :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} \right)$$

ou encore sous forme matricielle : pour  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $U^{n+1} = AU^n + D$  avec  $(U^n)_{M+i} = (u_i^n)$ , pour  $i \in \{-M+1, \dots, M\}$ ,  $D_1 = \frac{\lambda}{2}$ ,  $D_i = 0$ ,  $i \in \{2, \dots, 2M\}$  et  $A$  une matrice carré de taille  $2M$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On peut montrer le résultat suivant :

### **Théorème 15.**

*Il existe  $u_0 \in C_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que la solution approchée calculée à l'aide du schéma centré ne converge pas vers la solution du problème continue (et cela quel que soit la relation entre  $h$  et  $k$ ).*

Nous allons simplement illustrer quelques points qui montre qu'il faut éviter d'utiliser ce schéma.

- Le schéma centré ne conserve pas la positivité ie  $(\forall i \in \mathbb{Z}, u_i^0 \geq 0) \not\Rightarrow (\forall i \in \mathbb{Z}, u_i^1 \geq 0)$ .  
Par exemple, si  $u_i^0 = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } i \leq 0 \\ 1 & \text{lorsque } i > 0 \end{cases}$  alors  $u_0^1 = -\frac{\lambda}{2}$  (figure 39).
- Le schéma centré n'est pas  $L^\infty$ -stable ie  $\max\{|u_i^0|, i \in \mathbb{Z}\} = 1 \not\Rightarrow \max\{|u_i^1|, i \in \mathbb{Z}\} \leq 1$ .  
L'exemple ci-dessus illustre aussi ce point, puisque dans ce cas là  $\max\{|u_i^1|, i \in \mathbb{Z}\} = 1 + \frac{\lambda}{2}$  (figure 40).

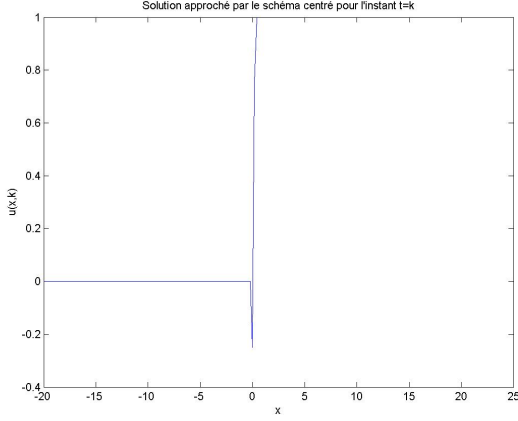


FIG. 39 – Positivité pour le schéma centré

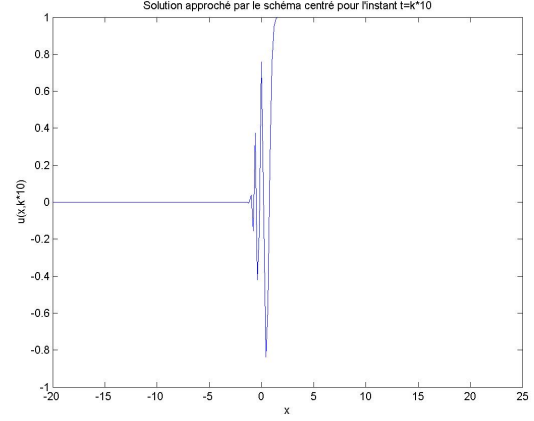


FIG. 40 – Stabilité  $L^\infty$  pour le schéma centré

- Enfin, le schéma centré n'est pas  $L^2$ -stable ie  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} (u_i^0)^2 = 1 \not\Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} (u_i^1)^2 \leq 1$ .  
Par exemple, si  $u_i^0 = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } i \neq 0 \\ 1 & \text{lorsque } i = 0 \end{cases}$  alors  
$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (u_i^1)^2 &= (u_{-1}^1)^2 + (u_0^1)^2 + (u_1^1)^2 \\ &= 1 + \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}$$

## 2.2 Schéma décentré

Pour le cas linéaire (l'exemple 1), on obtient le schéma suivant : pour  $n \in \{0, \dots, M-1\}$

$$u_i^{n+1} = (1 - \lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n, \text{ si } i \in \{-M+1, \dots, M\}$$

Ce schéma peut encore s'écrire sous forme matricielle : pour  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $U^{n+1} = AU^n + D$  avec  $(U^n)_{i+M} = (u_i^n)$ , pour  $i \in \{-M+1, \dots, M\}$ ,  $D_1 = \lambda$ ,  $D_i = 0$ ,  $i \in \{2, \dots, 2M\}$  et  $A$  une matrice carré de taille  $2M$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

### **Théorème 16.**

*Stabilité  $L^\infty$  :*  
Si  $\lambda \leq 1$  et  $A \leq u_0 \leq B$  p.p alors  $\forall n \in \{0, \dots, M-1\}, \forall i \in \mathbb{Z}$  on a  $A \leq u_i^n \leq B$ .

**Démonstration :** Soit  $n \in \{0, \dots, M-1\}$  tel que  $\forall i \in \mathbb{Z}$  on a  $A \leq u_i^n \leq B$ . Soit  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$u_i^{n+1} = \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geq 0} u_i^n + \lambda u_{i-1}^n.$$

$u_i^{n+1}$  est une combinaison linéaire convexe de  $u_i^n, u_{i-1}^n$  donc  $\forall i \in \mathbb{Z}, A \leq u_i^{n+1} \leq B$ . ■

**Théorème 17.**

*Convergence :*

Si  $u_0$  est  $C^2(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \leq 1$ ,  $\forall n \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$  on pose  $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$ , on obtient

$$|e_i^n| \leq ChT$$

**Démonstration :** On rappelle que la solution exacte est  $u_0(x-t) \in C^2(\mathbb{R})$ .

Consistance : Soit  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $i \in \{-n+1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} R_i^n &= \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k} + \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h} \\ &\leq C(u_0)h \end{aligned}$$

On a  $\forall i \in \mathbb{Z}, e_i^0 = 0$ . L'erreur  $e_i^n$  vérifie donc :  $\frac{e_i^{n+1} - e_i^n}{k} + \frac{e_i^n - e_{i-1}^n}{h} = R_i^n$

$$\begin{aligned} e_i^{n+1} &= \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} e_i^n + \lambda e_{i-1}^n + kR_i^n \\ |e_i^{n+1}| &\leq \sup_j |e_j^n| + kCh \\ &\leq (n+1)kCh \\ &\leq Tch \end{aligned}$$

■

On obtient par exemple la courbe de convergence en norme 1 suivante (figure 42) si  $u_0$  (représentée figure 41) est donnée par la formule (10).

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{3}{2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^4 + \frac{3}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{41}{32} & \text{si } 1 < x < 2 \\ (3-x)^3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad (10)$$

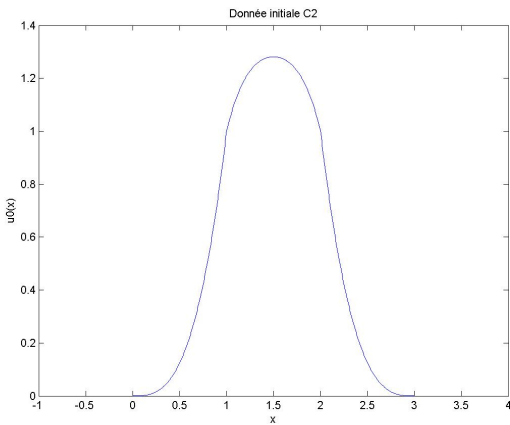


FIG. 41 –  $u_0$  de classe  $C^2$

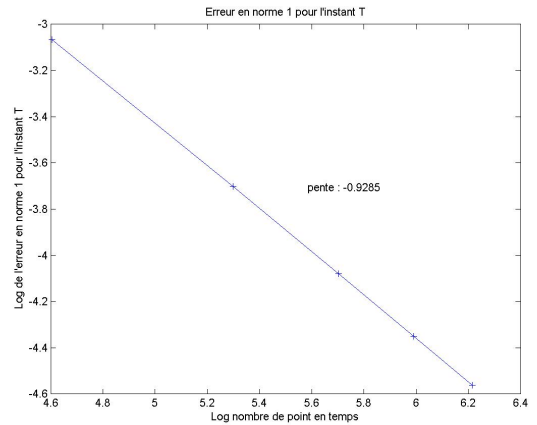


FIG. 42 –  $\ln(\|u(x_i, T) - u_i^M\|_1)$  pour  $u_0$  régulière

La solution pour l'exemple 1 approchée par le schéma décentré pour  $t$  entre 0 et  $T$  est donnée par la figure 43. Les croix représentent l'emplacement du saut de la solution exacte pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ . De plus la courbe de convergence en erreur en norme 1 (figure 44) montre que l'on obtient une erreur d'ordre  $h^{1/2}$  pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ . En effet, le théorème ci-dessus ne s'applique pas puisque  $u_0$  n'est pas régulière.

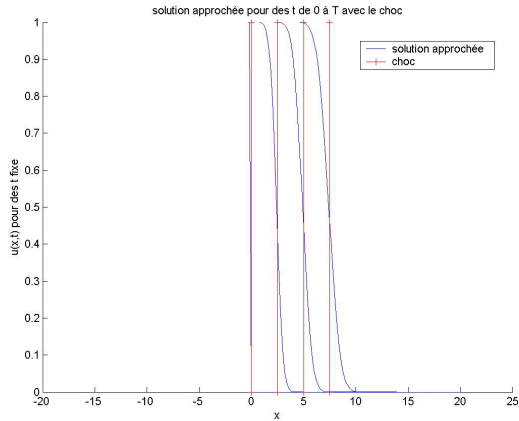


FIG. 43 – Solution approchée schéma décentré,  $\lambda = \frac{1}{2}$

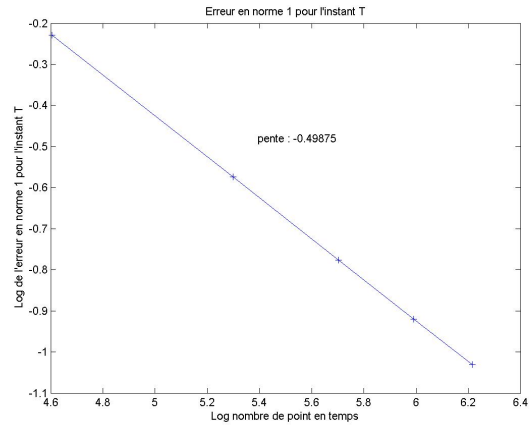


FIG. 44 –  $\ln(\|u(x_i, T) - u_i^M\|_1)$  pour le schéma décentré

### Influence de $\lambda$ :

Si  $\lambda = 1$ , on a  $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$ , le schéma est exact.

Quand  $\lambda < 1$ , on observe un comportement diffusif. Les figures 45 et 46 illustre ce phénomène sur des données initiales créneaux et sinus pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

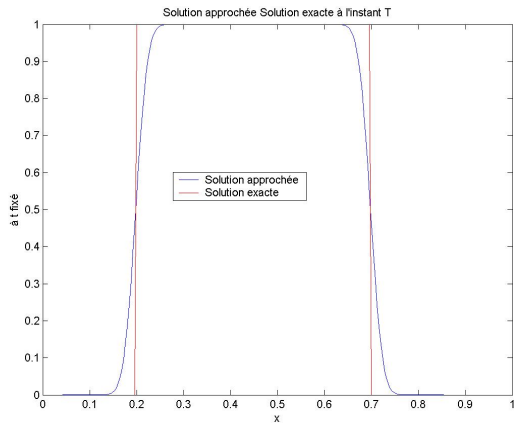


FIG. 45 – Solution approchée-exacte pour  $u_0$  créneau

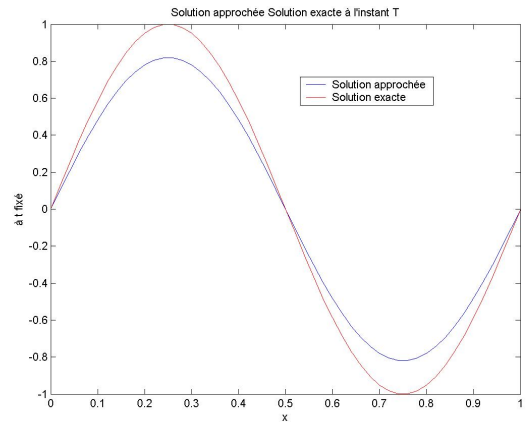


FIG. 46 – Solution approchée-exacte pour  $u_0(x) = \sin(2\pi x)$

On a également essayé de quantifier la diffusion en fonction du temps pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ . La figure 47 montre comment le nombre de maille entre le saut exact et le saut approché évolue en fonction de  $t$ . On remarque qu'il augmente avec le temps.

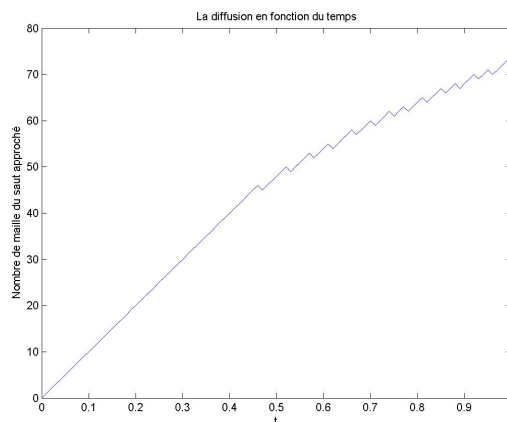


FIG. 47 – Nombre de maille entre le saut exact et celui avec la diffusion en fonction de  $t$

Le comportement diffusif de ce schéma peut s'expliquer (quand les solutions sont régulières) de la manière suivante. Fixons  $\lambda < 1$ . Notons  $\forall n \in \{0, \dots, M\}, i \in \mathbb{Z}$

$$R_h^{i,n}(u) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k} + \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h}$$

Un développement de Taylor montre que :

$$R_h^{i,n}(u) = \partial_t u(x_i, t_n) + \partial_x u(x_i, t_n) + \frac{h\lambda}{2} \partial_{tt} u(x_i, t_n) - \frac{h}{2} \partial_{xx} u(x_i, t_n) + O(h^2)$$

**Remarque 3 :** C'est cette égalité qui donne , si  $u$  est solution de  $\partial_t u + \partial_x u = 0$ ,  $|R_h^{i,n}(u)| \leq C(u_0)h$ .

Appliquons cette égalité à  $v_h$  la solution de  $\partial_t v_h + \partial_x v_h - \frac{1-\lambda}{2} h \partial_{xx} v_h = 0$ . On obtient  $R_h^{i,n}(v_h) = O(h^2)$ . En effet,

$$\begin{aligned} \partial_{tt} v_h &= -\partial_t \partial_x v_h + \frac{1-\lambda}{2} h \partial_t \partial_{xx} v_h \\ &= \partial_{xx} v_h - (1-\lambda) h \partial_{xxx} v_h + \frac{(1-\lambda)^2}{4} h^2 \partial_{xxxx} v_h \\ \frac{h\lambda}{2} \partial_{tt} v_h &= \frac{h\lambda}{2} \partial_{xx} v_h + O(h^2) \\ R_h^{i,n}(v_h) &= \frac{1-\lambda}{2} h \partial_{xx} v_h + \frac{h\lambda}{2} \partial_{xx} v_h - \frac{h}{2} \partial_{xx} v_h + O(h^2) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

Le schéma décentré amont approche donc la solution  $v_h$  du problème (11) à  $h^2$  près.

$$\begin{aligned} \partial_t v_h + \partial_x v_h - \frac{1-\lambda}{2} h \partial_{xx} v_h &= 0, & t \in ]0, +\infty[, x \in \mathbb{R}, \\ v_h(x, 0) &= u_0(x), & \text{p.p dans } \mathbb{R} \end{aligned} \quad (11)$$

### Théorème 18.

Soit  $v_h$  la solution du problème (11) et  $\lambda < 1$ , alors on a  $\forall n \in \{0, \dots, M\}$

$$\sup_i |v_h(x_i, t_n) - u_i^n| \leq Ch^2$$

La solution approchée a un comportement proche de celui de  $v_h$  (à  $h^2$  près).

**Démonstration :** On pose  $v_i^0 = u_0(x_i)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \{1, \dots, M-1\}$ ,  $v_i^n = v_h(x_i, t_n)$ . On peut donc écrire :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} + \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{h} = R_h^{i,n}(v_h)$$

Or

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

On pose  $f_i^n = v_i^n - u_i^n$  alors on a  $f_i^0 = 0$

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= (1-\lambda)f_i^n + \lambda f_{i-1}^n + k R_h^{i,n}(v_h) \\ |f_i^{n+1}| &\leq \sup_i |f_i^n| + kCh^2 \\ &\leq (n+1)kCh^2 \\ &\leq TCh^2 \\ \sup_i |v_h(x_i, t_n) - u_i^n| &\leq Ch^2 \end{aligned}$$

Le terme  $\partial_{xx} v_h$  est un terme diffusif. Le fait que le schéma approche  $v_h$  explique donc son comportement diffusif.

Illustrons le théorème à l'aide des schémas de la première partie. Plaçons nous dans un cas où la donnée initiale  $u_0$  est 1-périodique et régulière par exemple  $u_0(x) = \sin(2\pi x)$ . On peut approcher la solution exacte  $v_h$  par différentes méthodes.

– Euler implicite en temps et schéma volumes finis (périodiques) centrés en espace :

Si on pose  $v^n(x) = v_h(x, t_n)$ , alors on obtient  $v^{n+1}$  comme solution d'une équation diffusion convection réaction dont le second membre est  $v^n$ .

$$-\frac{1-\lambda}{2} h k \partial_{xx} v^{n+1} + k \partial_x v^{n+1} + v^{n+1} = v^n$$



Le graphique 48 représente les différentes courbes  $u$ ,  $v^n$  et  $u^n = (u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  à l'instant T pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Le théorème annonce une erreur entre  $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $v_h$  de l'ordre de  $h^2$ . Observons cette différence numériquement. La figure 49 montre que la différence est d'ordre h. Cela s'explique par le fait que nous avons choisit un schéma d'ordre 1 en temps (Euler implicite). La différence entre  $u^n$  et  $v^n$  que nous observons est uniquement due à la différence entre  $v_h$  et  $v^n$  qui est d'ordre 1. Essayons de construire un schéma d'ordre 2.

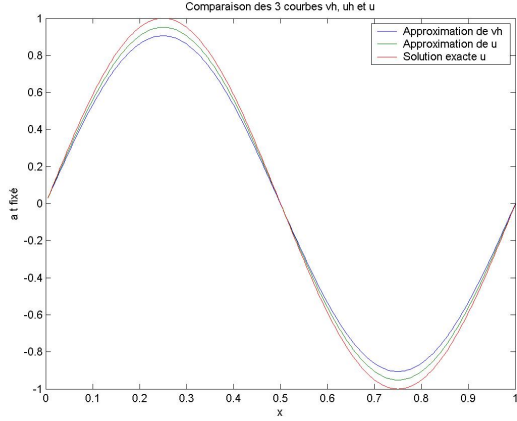


FIG. 48 –  $u$ ,  $v^n$  et  $u^n$  à l'instant T

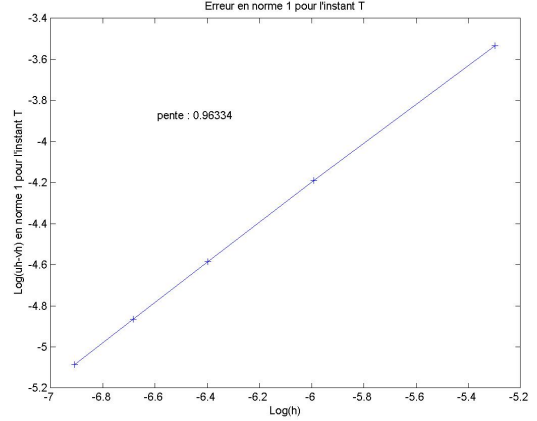


FIG. 49 –  $\ln(\|u^n - v^n\|_1)$  à l'instant T

– Lax Wendroff modifié :

Il est intéressant de voir que ce schéma est exactement le schéma décentré donc  $v^n = u^n$ .

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} &= v_i^n - \frac{\lambda}{2}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) + hk \frac{1 - \lambda v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{h^2} \\ &= v_i^n - \frac{\lambda}{2}(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n) + \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{1 - \lambda}{2}\lambda\right)(v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n) \\ &= v_i^n + \lambda v_{i-1}^n - \lambda v_i^n \end{aligned}$$

– Crank Nicholson en temps et schéma volumes finis (périodiques) centrés en espace :

Si on pose  $v^n(x) = v_h(x, t_n)$ , alors on obtient  $v^{n+1}$  comme solution d'une équation diffusion convection réaction dont le second membre dépendant uniquement de  $v^n$ .

$$-\frac{1 - \lambda}{4}hk \partial_{xx} v^{n+1} + \frac{k}{2} \partial_x v^{n+1} + v^{n+1} = v^n - \frac{k}{2} \partial_x v^n + \frac{1 - \lambda}{4}hk \partial_{xx} v^n$$

Le graphique 50 représente les différentes courbes  $u$ ,  $v^n$  et  $u^n$  à l'instant T pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Le théorème annonce une erreur entre  $(u_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $v_h$  de l'ordre de  $h^2$ . Dans ce cas, la différence entre  $v_h$  et  $v^n$  est d'ordre 2, donc la différence entre  $u^n$  et  $v^n$  est aussi d'ordre 2 (figure 51).

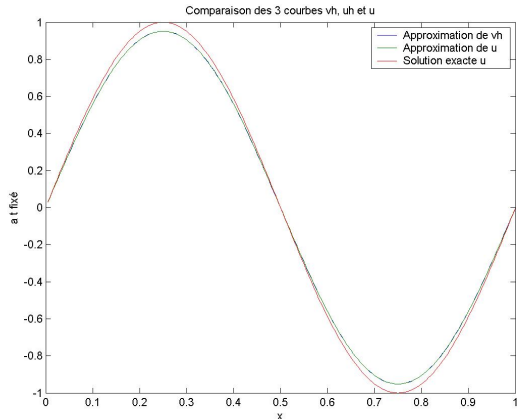


FIG. 50 –  $u$ ,  $v^n$  et  $u^n$  à l'instant T

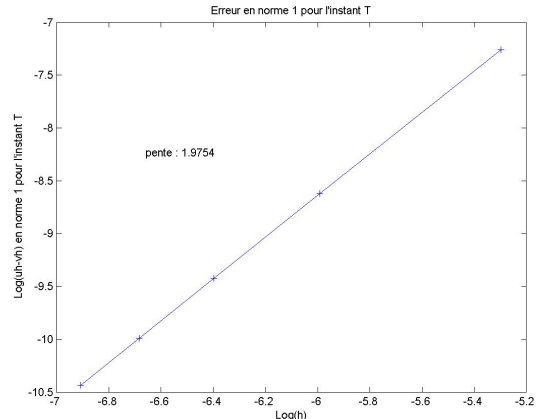


FIG. 51 –  $\ln(\|u^n - v^n\|_1)$  à l'instant T

Dans le cas où  $f$  n'est pas linéaire, on peut généraliser le schéma précédent en tenant compte du signe de  $f'$  : pour  $i \in \{-n+1, \dots, n\}$

$$f_{i+1/2}^n = \begin{cases} f(u_i^n) & \text{si } f'(u(x_{i+1/2}, t_n)) > 0 \\ f(u_{i+1}^n) & \text{si } f'(u(x_{i+1/2}, t_n)) < 0 \end{cases}$$

Pour l'exemple 2 :

La solution approchée par le schéma décentré pour  $t$  entre 0 et  $T$  est donnée par la figure 52 pour  $\lambda = \frac{1}{6}$ . Les croix désignent l'emplacement du saut de la solution exacte. Pour  $\lambda = \frac{3}{4}$ , on obtient une solution faible non entropique figure 53.

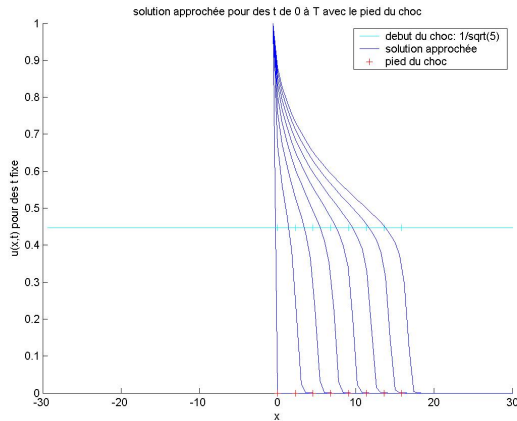


FIG. 52 – Solution approchée (ex2) pour  $t \in [0, T]$

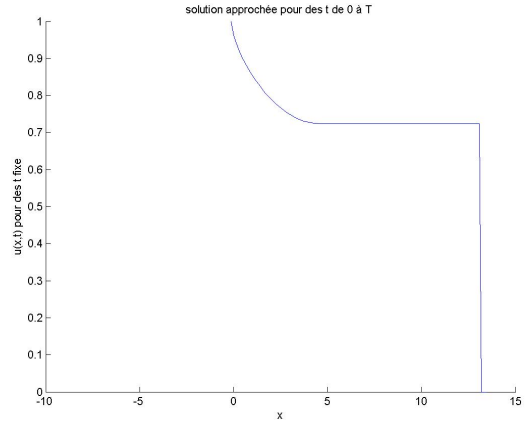


FIG. 53 – Solution approchée (ex2) pour  $t = T, \lambda = \frac{3}{4}$

Pour l'exemple 3 :

On obtient des solutions faibles non entropiques (figure 54, 55) (dont les expressions sont données en exemple (9)).

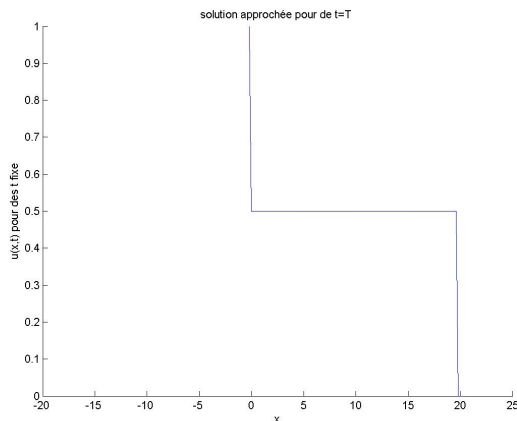


FIG. 54 – Solution approchée (ex3) pour  $t = T, \lambda = \frac{1}{2}$

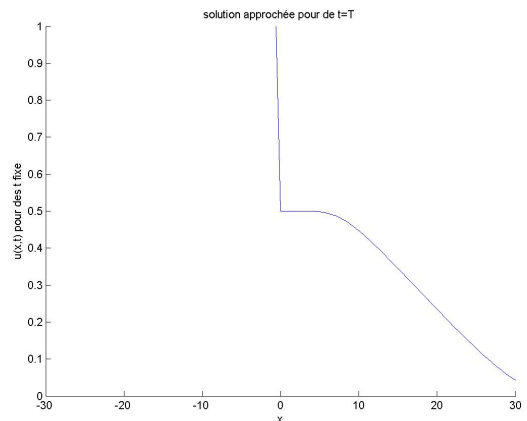


FIG. 55 – Solution approchée (ex3) pour  $t = T, \lambda = \frac{1}{6}$

### 2.3 Schéma à flux monotone

Dans la suite, on va considérer des schémas à flux monotone ie  $f_{i+1/2}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n)$  où  $g$  est une fonction croissante du premier argument et décroissante du second argument.

### Théorème 19.

*Stabilité  $L^\infty$  :*

Soit un schéma avec flux  $g$  monotone,  $g$   $M$ -Lipschitz sur  $[A, B]^2$  avec  $A \leq u_0 \leq B$  p.p et si  $k \leq \frac{h}{2M}$ , alors  $A \leq u_i^n \leq B, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$  et donc  $u_{\tau, k}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{k}{h}(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)) \\ &= u_i^n - \lambda \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} (u_{i+1}^n - u_i^n) - \lambda \frac{g(u_i^n, u_i^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{u_i^n - u_{i-1}^n} (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ &= u_i^n + C_i^n (u_{i+1}^n - u_i^n) + D_i^n (u_{i-1}^n - u_i^n) \end{aligned}$$

avec  $C_i^n = -\lambda \frac{g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_i^n, u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \geq 0$  et  $D_i^n = \lambda \frac{g(u_i^n, u_i^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)}{u_i^n - u_{i-1}^n} \geq 0$  grâce au fait que  $g$  est un flux monotone.

$$u_i^{n+1} = u_i^n (1 - C_i^n - D_i^n) + C_i^n u_{i+1}^n + D_i^n u_{i-1}^n$$

Une condition suffisante pour que  $u_i^{n+1}$  soit combinaison linéaire convexe de  $u_{i-1}^n, u_i^n$  et  $u_{i+1}^n$  est que :  $C_i^n \leq \frac{1}{2}, D_i^n \leq \frac{1}{2}$ . Or  $C_i^n \leq \frac{kM}{h}, D_i^n \leq \frac{kM}{h}$  et sous la condition CFL :  $k \leq \frac{h}{2M}$  on a bien  $C_i^n \leq \frac{1}{2}, D_i^n \leq \frac{1}{2}$ .  
Donc si  $A \leq u_i^n \leq B, \forall i \in \mathbb{Z}$  on a  $A \leq u_i^{n+1} \leq B, \forall i \in \mathbb{Z}$ . ■

### Théorème 20.

*Convergence :*

Soit  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  la solution entropique du problème (8),  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}), f \in C^1(\mathbb{R})$ , un schéma avec flux  $g$  monotone,  $g$   $M$ -Lipschitz sur  $[A, B]^2$  avec  $A \leq u_0 \leq B$  p.p.

Soit  $u_{\tau, k}$  la solution approchée pour  $\tau$  un maillage de  $\mathbb{R}$ , si  $\tau$  et  $k$  satisfont la CFL :  $k \leq \frac{h}{2M}$ , alors

$$u_{\tau, k} \xrightarrow{h, k \rightarrow 0} u \text{ dans } L_{loc}^p \quad \forall p < \infty$$

On a considéré 2 exemples :

– On considère le schéma "amont des pétroliers" :

$$g_P(a, b) = \begin{cases} f(a) & \text{si } -1 + 2f_1(a) \leq 0 \\ \frac{f_1(a)(1 + 2f_2(b))}{f_1(a) + f_2(b)} & \text{si } -1 + 2f_1(a) > 0 \end{cases}$$

La solution pour l'exemple 3 approchée par le schéma "amont des pétroliers" pour  $t$  entre 0 et  $T$  est donnée par la figure 56 pour  $\lambda = \frac{1}{6}$ . On regarde l'erreur en norme 1, on a obtenu une erreur d'ordre  $h^{0.8}$  figure 57.

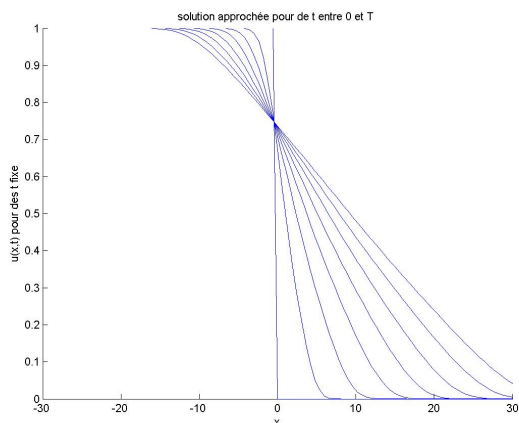


FIG. 56 – Solution approchée (ex3) pour  $t \in [0, T]$

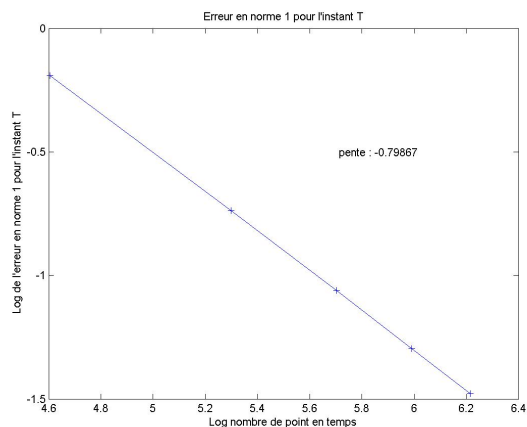


FIG. 57 –  $\ln(\|u(x_i, T) - u_i^M\|_1)$  "amont des pétroliers"

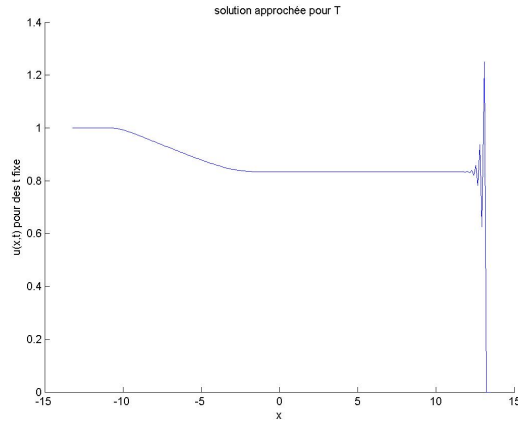


FIG. 58 – Pour l'exemple 3 approché par le schéma "amont des pétroliers"  $\lambda = \frac{3}{4}$

On n'obtient pas une solution pour  $\lambda = \frac{3}{4}$  (figure 58) pour l'exemple 3 approché par le schéma "amont des pétroliers".

– On considère le schéma de Godunov :

$$g_G(a, b) = \begin{cases} \min\{f(c), c \in [a, b]\} & \text{si } a \leq b \\ \max\{f(c), c \in [b, a]\} & \text{si } a > b \end{cases}$$

La solution pour l'exemple 3 approchée par le schéma de Godunov pour  $t$  entre 0 et  $T$  est donnée par la figure 59 pour  $\lambda = \frac{1}{6}$ . On regarde l'erreur en norme 1, on a obtenu une erreur d'ordre  $h^{0.8}$  figure 60.

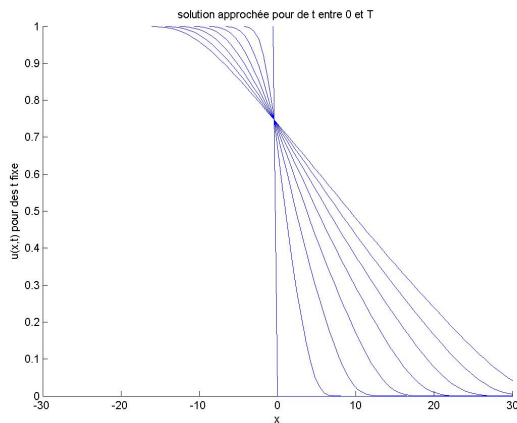


FIG. 59 – Solution approchée (ex3) pour  $t \in [0, T]$

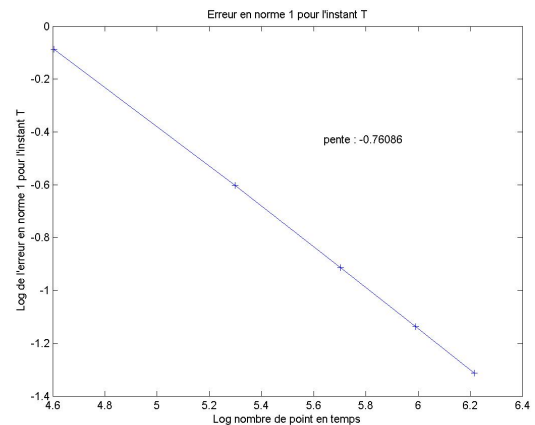


FIG. 60 –  $\ln(\|u(x_i, T) - u_i^M\|_1)$  pour le schéma de Godunov