

Intégrales elliptiques*

Krell Stella, Minjeaud Sebastian, Dunand Clément

19 juillet 2005

Pour déterminer le champ magnétique créé par un arc d'anneau circulaire de faible section traversé par un courant, on utilise généralement la formule de Biot et Savart. Le champ magnétique obtenu s'exprime en fonction de différentes intégrales elliptiques pour lesquelles il n'existe pas de formule exacte.

Le but de ce projet est la réalisation d'un programme performant permettant de calculer une approximation de ces intégrales elliptiques.

*Projet informatique réalisé sous la tutelle de Monsieur Patrice Boissoles

Table des matières

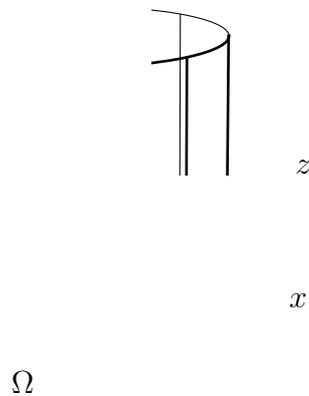
1	Motivation : un problème de physique	1
1.1	Présentation du problème	1
1.2	Champ créé par une portion de spire circulaire	1
2	Intégrales elliptiques canoniques	3
2.1	Définitions et notations	3
2.1.1	Intégrale elliptique du premier type	3
2.1.2	Intégrale elliptique du deuxième type	4
2.1.3	Intégrale elliptique du troisième type	4
2.1.4	Intégrales elliptiques complètes	5
2.2	Propriétés	5
2.2.1	Intégrales elliptiques des premier et deuxième types	5
2.2.2	La fonction Zeta de Jacobi	7
3	Méthodes classiques	7
3.1	Méthode des rectangles	7
3.2	Méthode des trapèzes	7
3.3	Méthode de Simpson	8
4	Méthode de calcul performante des intégrales complètes	8
4.1	Calcul de l'intégrale complète de premier type $K(k)$	8
4.1.1	Forme homogène de l'intégrale elliptique de premier type	8
4.1.2	Introduction de la moyenne Arithmético-Géométrique	11
4.1.3	Calcul de $K(k)$	14
4.2	Propriétés intermédiaires	15
4.2.1	Équations différentielles liant les intégrales complètes de premier et deuxième type	15
4.2.2	Propriétés	18
4.3	Calcul de l'intégrale complète de deuxième type $E(k)$	20
5	Méthode de calcul performante des intégrales incomplètes	23
5.1	Relation entre $F(\phi_{n+1}, k_{n+1})$ et $F(\phi_n, k_n)$	24
5.1.1	Expression de $F(\phi_{n+1}, k_{n+1})$	24
5.1.2	Expression de $F(\phi_n, k_n)$	25
5.1.3	Égalité	26

5.2	Transformation de Landen descendante et retour aux notations initiales	26
5.3	Algorithme de la moyenne arithmético-géométrique	28
6	Applications	29
6.1	Calcul du champ magnétique	29
6.1.1	Notations	29
6.1.2	Apparition des intégrales elliptiques	30
6.1.3	Calculs	33
6.2	Calcul de la période d'oscillation d'un pendule	35

1 Motivation : un problème de physique

1.1 Présentation du problème

L'étude des champs magnétiques trouve ses applications dans de nombreux domaines scientifiques, notamment l'imagerie médicale, la téléphonie mobile, la radiodiffusion, etc. Dans le domaine de l'imagerie à résonance magnétique (IRM) par exemple, l'image obtenue est dûe au champ magnétique créé par une antenne lorsqu'elle est parcourue par une intensité donnée.



L'antenne étudiée est de forme cylindrique : elle se compose de deux bases circulaires reliées par des fils qui constituent des génératrices de ce cylindre. L'étude du champ magnétique qu'elle génère passe par le calcul du champ créé par une spire circulaire. Hors de son axe, l'expression obtenue fait intervenir des intégrales dites elliptiques, dont on ne peut calculer analytiquement la valeur exacte.

FIG. 1 – Antenne

1.2 Champ créé par une portion de spire circulaire

On souhaite calculer le champ créé par une portion l de spire circulaire. Pour cela, on la paramètre dans le repère d'espace par ses coordonnées cylindriques. Elle se situe à une altitude Z_0 , est centrée sur l'axe z et a pour rayon Ω . L'angle polaire θ_0 variera de θ_1 à θ_2 . Cela se traduit en terme de coordonnées cartésiennes par :

$$\begin{cases} x_0 = \Omega \cos \theta_0 \\ y_0 = \Omega \sin \theta_0 \\ z_0 = Z_0 \end{cases}$$

En choisissant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour repère cartésien, le déplacement élémentaire en un point (x_0, y_0, z_0) , soit en cylindriques (Ω, θ_0, z_0) , de l'arc s'écrit :

$$\overrightarrow{dl_0} = \Omega(-\sin \theta_0 \vec{i} + \cos \theta_0 \vec{j}) d\theta_0$$

On peut alors calculer le potentiel vecteur puis le champ créés dans tout l'espace par cet arc de spire. Si $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{\Omega} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, on applique la loi de Biot et Savart :

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{J d\vec{l}_0}{|\vec{r} - \vec{\Omega}|}$$

où J désigne l'intensité parcourant la spire et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Puis on écrit :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Finalement, en notant $D = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, on obtient :

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} [B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}] \text{ avec } \begin{cases} B_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(z - z_0)\Omega \cos \theta_0}{D^3} d\theta_0 \\ B_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(z - z_0)\Omega \sin \theta_0}{D^3} d\theta_0 \\ B_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Omega[\Omega - r \cos(\theta - \theta_0)]}{D^3} d\theta_0 \end{cases}$$

En utilisant $\vec{r} = (r, \theta, z)$ dans l'expression de D , on obtient :

$$D = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + \Omega^2 - 2r\Omega \cos(\theta - \theta_0)}.$$

On effectue le changement de variable : $\theta - \theta_0 = 2\phi - \pi$. On adopte en outre les notations suivantes :

$$\begin{cases} R^2 = (r + \Omega)^2 + (z - z_0)^2 \\ k^2 = \frac{4r\Omega}{R^2} \end{cases}$$

L'expression de D devient :

$$\begin{aligned} D^2 &= (r + \Omega)^2 + (z - z_0)^2 - 2r\Omega(1 + \cos(2\phi - \pi)) \\ D^2 &= R^2(1 - k^2 \sin^2 \phi) \end{aligned}$$

Après changement de variable, en notant $\phi_i = \frac{\pi + \theta - \theta_i}{2}$ pour $i = 1, 2$, les coordonnées du champ \vec{B} deviennent :

$$\begin{cases} B_x = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(z - z_0) \cos(\theta - 2\phi + \pi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \\ B_y = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(z - z_0) \sin(\theta - 2\phi + \pi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \\ B_z = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(r + \Omega - 2r \sin^2 \phi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \end{cases}$$

Les trois composantes du champ magnétique créé par l'antenne s'expriment sous forme d'intégrales. Ces intégrales sont appelées intégrales elliptiques. Elles sont toutes exprimables en fonctions des formes canoniques présentées ci-après.

2 Intégrales elliptiques canoniques

2.1 Définitions et notations

2.1.1 Intégrale elliptique du premier type

L'intégrale elliptique du premier type dépend de deux paramètres : l'amplitude ϕ et un angle α .

$$F(\phi, \alpha) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}$$

Lorsque $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on peut effectuer le changement de variable simple suivant :

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta \\ dt &\leftrightarrow \cos \theta d\theta \\ &\leftrightarrow \sqrt{1 - t^2} dt, \end{aligned}$$

$$F(\phi, \alpha) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha t^2)(1 - t^2)}}$$

On utilise alors plutôt le paramètre $m = \sin^2 \alpha$, ($0 \leq m \leq 1$), en notant :

$$F(\phi, m) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - m t^2)(1 - t^2)}}$$

2.1.2 Intégrale elliptique du deuxième type

L'intégrale elliptique du deuxième type est définie avec les deux mêmes paramètres : l'amplitude ϕ et un angle α .

$$E(\phi, \alpha) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta$$

On peut effectuer le même changement de variable simple lorsque $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta \\ dt &\leftrightarrow \cos \theta d\theta \\ &\leftrightarrow \sqrt{1 - t^2} d\theta, \end{aligned}$$

on utilise encore le paramètre $m = \sin^2 \alpha$ ($0 \leq m \leq 1$). Ce qui donne :

$$E(\phi, m) = \int_0^{\sin \phi} \sqrt{\frac{1 - m t^2}{1 - t^2}} dt$$

2.1.3 Intégrale elliptique du troisième type

On peut même définir une troisième intégrale elliptique.

$$\Pi(\phi, \alpha, n) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \text{ pour } n > 0.$$

On peut effectuer le même changement de variable simple et obtenir donc :

$$\Pi(\phi, m, n) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{(1 - n t^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - m t^2)}}$$

Mais cette intégrale n'intervient pas dans le calcul du champ magnétique. On va donc la laisser de côté.

2.1.4 Intégrales elliptiques complètes

Lorsque l'amplitude vaut $\frac{\pi}{2}$, on note les intégrales complètes :

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \\ \text{et } E(\alpha) &= E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

On utilisera aussi le paramètre $k = \sin \alpha$. On notera dans ce cas pour $0 < k < 1$:

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ K(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

2.2 Propriétés

2.2.1 Intégrales elliptiques des premier et deuxième types

Pour tout angle α , on peut se restreindre à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour ϕ grâce aux propriétés immédiates suivantes :

On peut se ramener grâce aux propriétés ci-dessous à un calcul avec $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, en utilisant les formules :

$$\forall s \in \mathbb{Z}, F(s\pi + \phi, \alpha) = 2sK(\alpha) + F(\phi, \alpha)$$

$$\forall s \in \mathbb{Z}, E(s\pi + \phi, \alpha) = 2sE(\alpha) + E(\phi, \alpha)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{Z}, F(s\pi + \phi, \alpha) &= \int_0^{s\pi + \phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{s\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} + \int_{s\pi}^{s\pi + \phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

Le second terme est en fait $F(\phi, \alpha)$ par le changement de variable : $\theta \rightarrow \theta - s\pi$.

$$\begin{aligned} \text{et } \int_0^{s\pi} [\] d\theta &= \int_0^\pi [\] d\theta + \int_\pi^{2\pi} [\] d\theta + \dots + \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} [\] d\theta \\ &= s \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\] d\theta \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } F(s\pi + \phi, \alpha) = 2sK(\alpha) + F(\phi, \alpha)$$

$$\text{On a de même : } E(s\pi + \phi, \alpha) = 2sE(\alpha) + E(\phi, \alpha)$$

On se ramène ensuite à $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puisque si l'amplitude est négative, on a alors par le changement de variable : $\theta \rightarrow -\theta$:

$$\begin{aligned} F(-\phi, \alpha) &= \int_0^{-\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \\ &= -F(\phi, \alpha) \\ E(-\phi, \alpha) &= \int_0^{-\phi} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta \\ &= -E(\phi, \alpha) \end{aligned}$$

Cas particuliers :

$$\begin{aligned} F(\phi, 0) &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(0) \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^\phi d\theta \\ &= \phi \\ F\left(\phi, \frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^\phi \frac{d\theta}{\cos \theta} \\ &= \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right) \\ E(\phi, 0) &= \int_0^\phi \sqrt{1 - \sin^2(0) \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \phi \\ E\left(\phi, \frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^\phi \cos \theta d\theta \\ &= \sin \phi \end{aligned}$$

2.2.2 La fonction Zeta de Jacobi

La fonction Zeta de Jacobi permet de relier $E(\phi, \alpha)$ et $F(\phi, \alpha)$ pour une amplitude quelconque à l'aide des intégrales complètes $K(\alpha)$ et $E(\alpha)$:

$$Z(\phi, \alpha) = E(\phi, \alpha) - \frac{E(\alpha)F(\phi, \alpha)}{K(\alpha)}$$

Il faut donc introduire des méthodes numériques pour calculer l'intégrale elliptique de premier type.

3 Méthodes classiques

3.1 Méthode des rectangles

On subdivise l'intervalle $[0, \phi]$ grâce à $n + 1$ points équidistants. Le pas de la subdivision est noté : $h = \frac{\phi}{n}$.

Les points de la subdivision sont notés : $t_i = ih$, ($0 \leq i \leq n$).

Sur le i -ème intervalle de la subdivision on approche la fonction à intégrer par sa valeur en t_i . On trouve alors :

$$F(\phi, \alpha) \simeq h \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_i}}$$

3.2 Méthode des trapèzes

On utilise une subdivision et des notations identiques à celles de la méthode des rectangles.

Sur le i -ème intervalle on approche maintenant la fonction à intégrer par une droite passant par ses valeurs en t_i et t_{i+1} . On a la formule :

$$F(\phi, \alpha) \simeq \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_i}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_{i-1}}} \right)$$

$$F(\phi, \alpha) \simeq \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_0}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_n}} \right) + h \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_i}}$$

3.3 Méthode de Simpson

La fonction est maintenant approchée par une parabole passant par ses valeurs en t_i , $\frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ et t_{i+1} . On obtient la formule :

$$F(\phi, \alpha) \simeq \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_i}} + \frac{4}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t_{i+1}}}$$

Ces méthodes sont polynomiales d'ordre 1, 2 et 4 donc nous allons présenter une méthode plus performante.

4 Méthode de calcul performante des intégrales complètes

On utilise dans cette partie la notation, pour $0 < k < 1$:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

On notera $k' = \sqrt{1 - k^2}$

4.1 Calcul de l'intégrale complète de premier type $K(k)$

4.1.1 Forme homogène de l'intégrale elliptique de premier type

On introduit une forme généralisée de l'intégrale elliptique complète de premier type définie pour $a, b > 0$:

$$T(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \theta}}$$

On effectue alors un changement de variable en posant :

$$\begin{aligned}t &= b \tan \theta \\dt &\leftrightarrow \frac{b}{\cos \theta} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} d\theta \\&\leftrightarrow \frac{b}{\cos \theta} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{b}\right)^2} d\theta \\&\leftrightarrow \frac{d\theta}{\cos \theta} \sqrt{b^2 + t^2}\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} \leftrightarrow \frac{dt}{\sqrt{b^2 + t^2}}$$

On obtient :

$$T(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

On pose maintenant :

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2} \left(t - \frac{ab}{t} \right) \\du &\leftrightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{t^2} \right) dt\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{2u}{t} &= 1 - \frac{ab}{t^2} \\1 + \frac{ab}{t^2} &= 2 \left(1 - \frac{u}{t} \right),\end{aligned}$$

on obtient :

$$dt \leftrightarrow \frac{du}{1 - \frac{u}{t}}$$

De plus, on remarque que :

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{t^4 - 2abt^2 + a^2b^2}{4t^2} \\4u^2t^2 &= t^4 - 2abt^2 + a^2b^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(a^2 + t^2)(b^2 + t^2) &= t^4 + a^2b^2 + (a^2 + b^2)t^2 \\ &= 4u^2t^2 + 2abt^2 + (a^2 + b^2)t^2 \\ &= t^2(4u^2 + (a + b)^2)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \leftrightarrow \frac{du}{(t - u)\sqrt{4u^2 + (a + b)^2}}$$

Mais :

$$\begin{aligned}t^2 - 2ut - ab &= 0 \\ t &= u \pm \sqrt{u^2 + ab} \\ t - u &= \pm \sqrt{u^2 + ab} \\ \text{or } t - u &= \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{t} + t \right) \\ &> 0\end{aligned}$$

Finalement on arrive à :

$$\begin{aligned}T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(4u^2 + (a + b)^2)(u^2 + ab)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left[u^2 + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] (u^2 + ab)}} \\ &= T \left(\frac{1}{2}(a + b), \sqrt{ab} \right)\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer :

$$T(a, b) = T \left(\frac{1}{2}(a + b), \sqrt{ab} \right)$$

Ce qui nous amène à introduire la moyenne arithmético-géométrique.

4.1.2 Introduction de la moyenne Arithmético-Géométrique

L'égalité :

$$T(a, b) = T\left(\frac{1}{2}(a + b), \sqrt{ab}\right)$$

nous amène à définir les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_0 \geq 0 \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

b_{n+1} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \geq 0$.

On veut montrer que ces deux suites sont adjacentes.
Pour cela on s'intéresse d'abord à leur différence :

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} + b_{n-1}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à :

$$a_n - b_n \geq 0 \tag{1}$$

$$a_n \geq b_n \tag{2}$$

$$\sqrt{a_n} \geq \sqrt{b_n} \tag{3}$$

En utilisant (3) et la définition de récurrence de la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sqrt{a_n} \sqrt{b_n} \\ &\geq b_n \end{aligned}$$

La suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

En utilisant (2) et la définition de récurrence de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ &\leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) \\ &= a_n \end{aligned}$$

La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

De plus, $\forall n \geq 1$, $a_n \geq b_0$ et $b_n \leq a_0$, donc les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, monotones et bornées, convergent. On va montrer qu'elles ont même limite. On revient à la différence des deux suites. En utilisant (3) on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} \\ &\leq \frac{a_n - b_n}{2} \\ &\leq \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{4} \\ &\vdots \\ &\leq \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve qu'elles ont même limite notée $M(a, b)$. De plus, la convergence est exponentielle.

Revenons à l'intégrale complète généralisée.

On a $\forall n \geq 1$, $T(a_n, b_n) = T(a_{n-1}, b_{n-1}) = \dots = T(a_0, b_0)$. Les théorèmes d'interversion limite/intégrale montrent que :

$$T(a_0, b_0) = T(M(a_0, b_0), M(a_0, b_0))$$

Or :

$$\begin{aligned}
T(M(a_0, b_0), M(a_0, b_0)) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{M^2(a_0, b_0) + t^2} \\
&= \frac{2}{\pi M(a_0, b_0)} \left[\arctan \left(\frac{t}{M(a_0, b_0)} \right) \right]_0^\infty \\
&= \frac{2}{\pi M(a_0, b_0)} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] \\
&= \frac{1}{M(a_0, b_0)}
\end{aligned}$$

On a donc $\forall a, b > 0$, $T(a, b) = \frac{1}{M(a, b)}$

Revenons maintenant à la forme canonique introduite en 4.1 :

$$\begin{aligned}
T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\
&= \frac{2}{a\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \theta}} \\
&= \frac{2}{a\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta}}
\end{aligned}$$

En posant $k' = \frac{b}{a}$, on a :

$$\begin{aligned}
T(1, k') &= \frac{2}{\pi} K(k) \\
&= \frac{1}{M(1, k')}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$K(k) = \frac{\pi}{2M(1, k')}$$

Si on pose $a_0 = 1$ et $b_0 = k'$, la suite $\left(\frac{\pi}{2a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge exponentiellement vers $K(k)$.

4.1.3 Calcul de $K(k)$

La limite des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ est inchangée si on prend pour termes initiaux a_1 et b_1 .

$$\begin{aligned}M(a, b) &= M\left(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right) \\M(1, b) &= M\left(\frac{1}{2}(1+b), \sqrt{b}\right) \\&= \frac{1+b}{2}M\left(1, \frac{2\sqrt{b}}{1+b}\right)\end{aligned}$$

On va donc s'intéresser à la suite particulière ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{cases} 0 \leq k_0 \leq 1 \\ k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} \end{cases}$$

On va étudier la valeur de $M(1, k_0)$.

$$\begin{aligned}M(1, k_0) &= \frac{1+k_0}{2}M(1, k_1) \\&= \frac{1+k_0}{2} \frac{1+k_1}{2} M(1, k_2) \\&= \prod_{n=1}^{N-1} \frac{1+k_n}{2} M(1, k_N)\end{aligned}$$

Comme $k_0 \leq 1$, une étude de suite montre que $k_n \rightarrow 1$ et l'encadrement de $M(1, k_N)$:

$$\begin{array}{ccc} k_N & \leq M(1, k_N) & \leq 1 \\ M(1, k_N) & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} & 1 \end{array}$$

Donc on arrive au résultat :

$$M(1, k_0) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+k_n}{2}$$

Rem : Cette étude montre que le produit ci-dessus converge.
D'où :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+k'_n}$$

où $k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}$.

4.2 Propriétés intermédiaires

4.2.1 Équations différentielles liant les intégrales complètes de premier et deuxième type

Les théorèmes de dérivabilité sous le signe de l'intégrale montre que :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial(\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta})}{\partial k} d\theta \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta - \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned}$$

On obtient une première équation différentielle :

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)]$$

De plus, en utilisant le développement en série entière suivant, valable pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(n-1))}{n!} x^n \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-3}{2})}{n!} (-k^2 \sin^2 \theta)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n n!} (-k^2 \sin^2 \theta)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!} k^{2n} \sin^{2n} \theta
\end{aligned}$$

où $(2n-3)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)$.

On intègre, et on intervertit intégrale et signe somme grâce à la convergence uniforme :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta \, d\theta$$

On retrouve les intégrales de Wallis :

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta \, d\theta \\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \right] \\
E(k) &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right]
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
K(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2})(-1)^n}{n!} k^{2n} I_{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} k^{2n} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n} \right]
\end{aligned}$$

On prouve, à l'aide de ces développements en série entière, l'égalité suivante :

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)}$$

En effet, si on note $u_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2$, ($n \geq 1$), on a alors :

$$k(1 - k^2) \frac{dK}{dk} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n 2n k^{2n} - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n 2n k^{2n+2}$$

$$\text{et } E(k) - (1 - k^2)K(k) = \frac{\pi}{2} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2n-1} k^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} u_n k^{2n} + k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n k^{2n+2} \right]$$

Montrer l'égalité revient à montrer :

$$\begin{cases} 2u_1 = -2u_1 + 1 \\ u_{n+1} 2(n+1) - u_n 2n = -\frac{u_{n+1}}{2(n+1)-1} - u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Or on a bien $u_1 = \frac{1}{4}$ et la deuxième égalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} u_{n+1} \left[(2n+2) + \frac{1}{2n+1} + 1 \right] &= u_n (2n+1) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} [(2n+3)(2n+1) + 1] &= u_n (2n+1)^2 \\ \text{or } u_{n+1} [(2n+3)(2n+1) + 1] &= \left[\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \right]^2 (4n^2 + 8n + 4) \\ &= \left[\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \right]^2 (n+1)^2 4 \\ &= \left[\frac{(2n+1)!!}{2^n n!} \right]^2 \\ &= u_n (2n+1)^2 \end{aligned}$$

On vient de prouver la récurrence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et donc aussi :

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)}$$

E et K sont reliés par les équations différentielles :

$$\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)]$$

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)}$$

4.2.2 Propriétés

On introduit ici la notation g pour une fonction qui est déjà apparue précédemment :

$$g(k) = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

On démontre quelques propriétés qui serviront dans la suite :

$$g^{-1}(k) = \frac{1 - k'}{1 + k'}$$

$$1 + g^{-1}(k) = \frac{2}{1 + k'}$$

$$\sqrt{1 - g(k)^2} = \sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2}}$$

$$= g^{-1}(k')$$

$$g^{-1}(k') = \sqrt{1 - g^2(k)}$$

De même :

$$g(k') = \sqrt{1 - g^{-1}(k)^2}$$

La propriété établie sur l'intégrale elliptique complète de premier type

$$T(1, k) = T\left(\frac{1+k}{2}, \sqrt{k}\right)$$

nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
K(k') &= \frac{2}{1+k} K\left(\sqrt{1-g^2(k)}\right) \\
&= \frac{2}{1+k} K(g^{-1}(k')) \\
K(k) &= \frac{2}{1+k'} K(g^{-1}(k)) \\
&= \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) \\
K(g(k)) &= \frac{2}{1+g^{-1}(k')} K(k) \\
&= (1+k)K(k) \\
K(k) &= \frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)
\end{aligned}$$

On différentie la dernière égalité :

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= -\frac{1}{(1+k)^2} K(g(k)) + \frac{1}{1+k} \dot{g}(k) \frac{dK}{dk}(g(k)) \\
\dot{K}(k) &= -\frac{1}{1+k} K(k) + \frac{1}{1+k} \dot{g}(k) \dot{K}(g(k)) \\
(1+k)\dot{K}(k) + K(k) &= \dot{g}(k)\dot{K}(g(k))
\end{aligned}$$

Or nous avons établi :

$$\begin{aligned}
kk'^2 \dot{K}(k) &= E(k) - k'^2 K(k) \\
\text{et } \underbrace{g(k)(1-g^2(k))}_{= \frac{2\sqrt{k}(1-k)^2}{(1+k)^3}} \dot{K}(g(k)) &= E(g(k)) - (1-g^2(k)) K(g(k)) \\
\frac{2k(1-k)}{1+k} \underbrace{\frac{1-k}{\sqrt{k}(1+k)^2}}_{= \dot{g}(k)} \dot{K}(g(k)) &= E(g(k)) - \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} K(g(k)) \\
\frac{2k(1-k)}{1+k} \left[(1+k)\dot{K}(k) + K(k) \right] &= 2k(1-k)\dot{K}(k) + \frac{2k(1-k)}{1+k} K(k) \\
&= E(g(k)) - \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} K(g(k))
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de la dérivée de $K(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+k} [E(k) - k'^2 K(k)] + \frac{2k(1-k)}{1+k} K(k) &= E(g(k)) - \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} K(g(k)) \\ E(k) + (k(1-k) - k'^2) K(k) &= \frac{1+k}{2} E(g(k)) - \frac{(1-k)^2}{2} K(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1+k}{2} E(g(k)) + \left[\frac{-2k(1-k) + 2k'^2 - (1-k)^2}{2} \right] K(k) \\ &= \frac{1+k}{2} E(g(k)) + \frac{k'^2}{2} K(k) \end{aligned}$$

En substituant $g^{-1}(k)$ à k , on obtient :

$$\begin{aligned} E(g^{-1}(k)) &= \frac{1+g^{-1}(k)}{2} E(k) + \frac{g^2(k')}{2} K(g^{-1}(k)) \\ &= \frac{1}{1+k'} E(k) + \frac{2k'}{(1+k')^2} \frac{1+k'}{2} K(k) \\ E(k) &= (1+k') E(g^{-1}(k)) - k' K(k) \end{aligned}$$

4.3 Calcul de l'intégrale complète de deuxième type $E(k)$

Introduisons les formes homogènes de l'intégrale elliptique :

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{a} K \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} T(a, b) \\ J(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= aE \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

On a montré que si on introduit les suites, $n \geq 0$ avec $a_0 > 0$, $b_0 \geq 0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} \end{cases}$$

alors $I(a_n, b_n) = I(a_0, b_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_n, b_n)$$

Pour cela, on pose $k_n = \frac{c_n}{a_n}$, $n \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} k'_n &= \sqrt{1 - k_n^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{c_n^2}{a_n^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n^2}} \\ &= \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) &= 2a_{n+1}E(k_{n+1}) \\ J(a_n, b_n) &= a_n E(k_n) \end{aligned}$$

Or :

$$k_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}$$

D'après la propriété de $E(k)$, on obtient :

$$E(k_n) = (1 + k'_n)E(k_{n+1}) - k'_n K(k_n)$$

$$\frac{1}{a_n} J(a_n, b_n) = \frac{2}{a_n} \underbrace{\frac{a_n + b_n}{2a_{n+1}}}_{=1} J(a_{n+1}, b_{n+1}) - \frac{b_n}{a_n} K(k_n)$$

$$\begin{aligned} 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) &= a_n b_n I(a_n, b_n) \\ &= a_n b_n I(a_0, b_0) \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 2a_nb_n &= (a_n + b_n)^2 - 2a_n^2 - 2a_nb_n \\
&= b_n^2 - a_n^2 \\
&= -c_n^2, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
2^{n+1}[J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a_0, b_0)] - 2^n [J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_0, b_0)] \\
&= 2^n [2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) + (a_n^2 - 2a_{n+1}^2)I(a_0, b_0)] \\
&= 2^n [a_nb_n I(a_0, b_0) + (a_n^2 - 2a_{n+1}^2)I(a_0, b_0)] \\
&= 2^{n-1}c_n^2 I(a_0, b_0)
\end{aligned}$$

On somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 I(a_0, b_0) &= -2J(a_1, b_1) + 2a_1^2 I(a_0, b_0) \\
&= -J(a_0, b_0) - a_0b_0 I(a_0, b_0) + \frac{(a_0 + b_0)^2}{2} I(a_0, b_0) \\
&= -J(a_0, b_0) + I(a_0, b_0) \frac{a_0^2 + b_0^2}{2} \\
J(a_0, b_0) &= I(a_0, b_0) \left[\frac{a_0^2 + b_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 \right]
\end{aligned}$$

En posant, $a_0 = 1$, $b_0 = k'$ et $c_0 = k$, on a :

$$\begin{aligned}
E(k) &= K(k) \left[\frac{1 + k'^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 \right] \\
K(k) - E(k) &= \left[1 - \frac{1 + k'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 \right] K(k) \\
\frac{K(k) - E(k)}{K(k)} &= \frac{k^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2
\end{aligned}$$

avec :

$$K(k) = \frac{\pi}{2M(1, k')}$$

On a vu au paragraphe 4.1.2, en notant $A = a_0 - b_0, \forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} c_n &\leq \frac{A}{2^n} \\ 2^n c_n^2 &\leq \frac{A^2}{2^n} \\ \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^n c_n^2 &\leq A^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{A^2}{2^N} \end{aligned}$$

On a ainsi trouver deux suites $\left(\frac{\pi}{2a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui approche respectivement $K(k)$ et $\frac{K(k) - E(k)}{K(k)}$. On a donc un moyen de calcul rapide des intégrales complètes.

Nous allons généraliser ce procédé pour le calcul des intégrales complètes.

5 Méthode de calcul performante des intégrales incomplètes

Le principe est de construire deux suites $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettant de relier simplement $F(\phi_{n+1}, k_{n+1})$ et $F(\phi_n, k_n)$. On choisit la suite des k_n de manière à ce qu'elle tende vers 0 pour pouvoir exploiter la relation $F(\phi, 0) = \phi$ vue en 2.2.1.

Introduisons les suites définies de la manière suivante :

$$k_{n+1} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}$$

$$\text{et } \tan(\phi_{n+1} - \phi_n) = k'_n \tan \phi_n$$

5.1 Relation entre $F(\phi_{n+1}, k_{n+1})$ et $F(\phi_n, k_n)$

5.1.1 Expression de $F(\phi_{n+1}, k_{n+1})$

$$\begin{aligned}
 F(\phi_{n+1}, k_{n+1}) &= \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_{n+1}^2 \sin^2 \theta}} \\
 &= \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{(1 - k_n')^2}{(1 + k_n')^2} \sin^2 \theta}} \\
 &= (1 + k_n') \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 + k_n')^2 - (1 - k_n')^2 \sin^2 \theta}}
 \end{aligned}$$

On s'intéresse tout d'abord à l'intérieur de la racine carrée :

$$\begin{aligned}
 (1 + k_n')^2 - (1 - k_n')^2 \sin^2 \theta &= (1 - \sin^2 \theta)(1 + k_n'^2) + 2k_n'(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2k_n' \sin^2 \theta \\
 &= \underbrace{(1 + k_n'^2)}_{\left(\frac{a+b}{a}\right)^2} \cos^2 \theta + \underbrace{4k_n'}_{4\frac{b}{a}} \sin^2 \theta \\
 &= \left(\frac{a+b}{a}\right)^2 \cos^2 \theta + 4\frac{b}{a} \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

On revient donc à l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 F(\phi_{n+1}, k_{n+1}) &= (1 + k_n') \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2} \cos^2 \theta + 4\frac{b}{a} \sin^2 \theta}} \\
 &= (1 + k_n') a \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2 \cos^2 \theta + 4ab \sin^2 \theta}} \\
 &= (1 + k_n') \frac{a}{2} \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}} \\
 &= (1 + k_n') \frac{a}{2} \int_0^{\phi_{n+1}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}}
 \end{aligned}$$

On fait le changement de variable :

$$u = \frac{a_1}{\tan \theta}$$

$$F(\phi_{n+1}, k_{n+1}) = (1 + k'_n) \frac{a}{2} \int_{\frac{a_1}{\tan \phi_{n+1}}}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}}$$

5.1.2 Expression de $F(\phi_n, k_n)$

$$\begin{aligned} F(\phi_n, k_n) &= \int_0^{\phi_n} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\phi_n} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - k'_n)^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^{\phi_n} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta} \\ &= a \int_0^{\phi_n} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

On fait le changement de variable :

$$t = b \tan \theta$$

$$F(\phi_n, k_n) = a \int_0^{b \tan \phi_n} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}$$

On fait le changement de variable :

$$u = \frac{1}{2} \left(t - \frac{ab}{t} \right)$$

$$\begin{aligned} F(\phi_n, k_n) &= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2} \left(b \tan \phi_n - \frac{a}{\tan \phi_n} \right)} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (u^2 + ab)}} \\ &= \frac{a}{2} \int_{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tan \phi_n} - b \tan \phi_n \right)}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (u^2 + ab)}} \end{aligned}$$

5.1.3 Égalité

Or

$$\begin{aligned}
 \tan(\phi_{n+1} - \phi_n) &= k'_n \tan \phi_n \\
 \tan \phi_{n+1} &= \frac{(1 + k'_n) \tan \phi_n}{1 - k'_n \tan^2 \phi_n} \\
 &= \frac{(a + b) \tan \phi_n}{a - b \tan^2 \phi_n} \\
 \frac{1}{\tan \phi_{n+1}} &= \frac{a - b \tan^2 \phi_n}{(a + b) \tan \phi_n} \\
 \frac{a + b}{\tan \phi_{n+1}} &= \frac{a}{\tan \phi_n} - b \tan \phi_n
 \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'égalité :

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{a_1}{\tan \phi_{n+1}}}^{+\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}} &= \int_{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tan \phi_n} - b \tan \phi_n \right)}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (u^2 + ab)}} \\
 F(\phi_{n+1}, k_{n+1}) &= (1 + k'_n) \frac{a}{2} \int_{\frac{a_1}{\tan \phi_{n+1}}}^{+\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}} \\
 F(\phi_n, k_n) &= \frac{a}{2} \int_{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tan \phi_n} - b \tan \phi_n \right)}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + u^2 \right) (u^2 + ab)}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } F(\phi_{n+1}, k_{n+1}) = (1 + k'_n) F(\phi_n, k_n)$$

5.2 Transformation de Landen descendante et retour aux notations initiales

On définit les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \\ (1 + \sin \alpha_{n+1})(1 + \cos \alpha_n) = 2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = \phi \\ \phi_{n+1} \geq \phi_n \\ \tan(\phi_{n+1} - \phi_n) = \cos \alpha_n \tan \phi_n \end{array} \right.$$

On vérifie, en posant $k'_n = \cos \alpha_n$, la relation de récurrence $k_{n+1} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}$.

On a alors d'après la partie précédente :

$$\begin{aligned} F(\phi, \alpha) &= (1 + \cos \alpha)^{-1} F(\phi_1, \alpha_1) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin \alpha_1) F(\phi_1, \alpha_1) \\ &\vdots \\ &= 2^{-n} \prod_{s=1}^n (1 + \sin \alpha_s) F(\phi_s, \alpha_s) \\ &= \Phi \prod_{s=1}^{\infty} (1 + \sin \alpha_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } \Phi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} F(\phi_n, \alpha_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_n}{2^n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= \frac{1}{2} \pi \prod_{s=1}^{\infty} (1 + \sin \alpha_s) \\ &= \frac{\pi}{2} \prod_{s=0}^{\infty} \frac{2}{1 + \cos \alpha_s} \end{aligned}$$

Donc

$$F(\phi, \alpha) = \frac{2}{\pi} K(\alpha) \Phi.$$

Ceci nous donne donc un moyen de calcul de l'intégrale elliptique de premier type.

5.3 Algorithme de la moyenne arithmético-géométrique

On va construire les suites définies par la moyenne arithmético-géométrique $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= \cos \alpha \\ c_0 &= \sin \alpha \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ c_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}$$

Grâce à la transformation de Landen, on va calculer les intégrales elliptiques en construisant la suite $(\phi_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi \\ \tan(\phi_{n+1} - \phi_n) &= \frac{b_n}{a_n} \tan \phi_n, \quad \phi_{n+1} \geq \phi_n \end{aligned}$$

À partir d'un certain rang, N assez grand, a_N et b_N sont très proches donc c_N est presque nul.

Ce qui nous permet d'approcher :

$$\begin{aligned} K(\alpha) &\simeq \frac{\pi}{2a_N} \\ E(\alpha) &\simeq K(\alpha) \left(1 - \frac{1}{2} (c_0^2 + 2c_1^2 + 2^2 c_2^2 + \dots + 2^N c_N^2) \right) \\ F(\phi, \alpha) &\simeq \frac{\phi_N}{2^N a_N} \\ Z(\phi, \alpha) &\simeq c_1 \sin \phi_1 + c_2 \sin \phi_2 + \dots + c_N \sin \phi_N \\ E(\phi, \alpha) &\simeq Z(\phi, \alpha) + \frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} F(\phi, \alpha) \end{aligned}$$

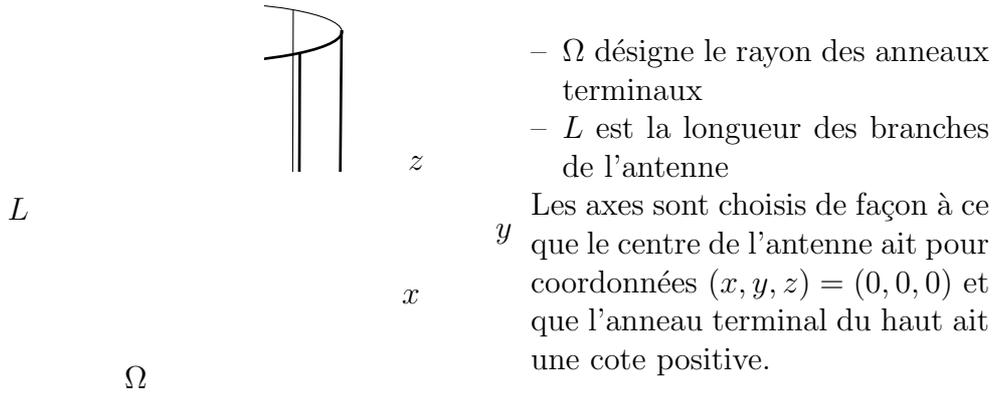
Les méthodes classiques : la méthode des rectangles, la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson sont respectivement d'ordre 1, 2 et 4, alors que la méthode de la moyenne arithmético-géométrique converge exponentiellement.

6 Applications

6.1 Calcul du champ magnétique

6.1.1 Notations

Les notations utilisées par la suite sont les suivantes :



- Ω désigne le rayon des anneaux terminaux
- L est la longueur des branches de l'antenne

Les axes sont choisis de façon à ce que le centre de l'antenne ait pour coordonnées $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et que l'anneau terminal du haut ait une cote positive.

FIG. 2 – Notations

On oriente le repère de façon à ce qu'il y ait deux branches sur l'axe des x . La première branche est celle située sur le demi-axe $x > 0$. On note θ_j l'angle entre l'axe des x et la j -ième branche de l'antenne. Compte tenu du choix de la première branche, $\theta_1 = 0$ et, les autres branches étant équiréparties, l'angle θ_j est donné par :

$$\forall 1 \leq j \leq N, \theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}$$

Le vecteur (I_1, \dots, I_N) des courants dans l'anneau terminal du haut est :

$$\forall 1 \leq j \leq N, I_j = I_0 \exp(i\theta_j)$$

$M(r, \theta, z)$ est la position du point où l'on calcule le champ.

La position initiale est $M\left(\Omega, \theta, \frac{L}{2}\right)$.

6.1.2 Apparition des intégrales elliptiques

On revient aux coordonnées du champ \vec{B} déterminées dans la première partie :

$$\begin{cases} B_x = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(z - z_0) \cos(\theta - 2\phi + \pi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \\ B_y = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(z - z_0) \sin(\theta - 2\phi + \pi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \\ B_z = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(r + \Omega - 2r \sin^2 \phi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \end{cases}$$

On va commencer par exprimer B_x en fonction des intégrales elliptiques canoniques :

$$B_x = \frac{2\Omega(z - z_0)}{R^3} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos(2\phi - \theta)}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

$$B_x = \frac{2\Omega(z - z_0)}{R^3} \left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\sin(2\phi) \sin \theta}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi + \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos(2\phi) \cos \theta}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \right]$$

$$B_x = \frac{2\Omega(z - z_0)}{R^3} \left[\underbrace{\sin \theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi}_{= A(k, \phi_1, \phi_2)} + \cos \theta \underbrace{\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1 - 2 \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi}_{= B(k, \phi_1, \phi_2)} \right]$$

Des manipulations similaires sur B_y donnent :

$$B_y = \frac{2\Omega(z - z_0)}{R^3} \left[-\cos \theta \underbrace{\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi}_{= A(k, \phi_1, \phi_2)} + \sin \theta \underbrace{\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1 - 2 \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi}_{= B(k, \phi_1, \phi_2)} \right]$$

D'où la nécessité de calculer A et B :

$$A(k, \phi_1, \phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{2 \sin \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d(\sin \phi)$$

$$A(k, \phi_1, \phi_2) = \frac{2}{k^2} \left[\frac{1}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \right]_{\phi_1}^{\phi_2}$$

B ne peut pas être calculée de manière exacte. Son expression va faire intervenir des intégrales elliptiques. Ici on notera :

$$E(k, \phi_1, \phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

$$\text{et } F(k, \phi_1, \phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi$$

On peut naturellement exprimer simplement ces deux intégrales en fonction des formes canoniques définies précédemment :

$$E(k, \phi_1, \phi_2) = E(\phi_2, k^2) - E(\phi_1, k^2) \quad \text{et} \quad F(k, \phi_1, \phi_2) = F(\phi_2, k^2) - F(\phi_1, k^2)$$

Calcul de B :

$$B(k, \phi_1, \phi_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1 - 2 \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

$$B(k, \phi_1, \phi_2) = \frac{1}{k^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{k^2 - 2k^2 \sin^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

$$B(k, \phi_1, \phi_2) = \frac{1}{k^2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{(2 - 2k^2 \sin^2 \phi) + (k^2 - 2)}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

$$B(k, \phi_1, \phi_2) = \frac{1}{k^2} \left[2 \underbrace{\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}}_{= F(k, \phi_1, \phi_2)} + (k^2 - 2) \underbrace{\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}}_{= C(k, \phi_1, \phi_2)} \right]$$

On va voir que E apparaît quant à lui dans le calcul de C . En effet, pour exprimer C , commençons par effectuer la dérivée suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\phi} [k^2 \sin \phi \cos \phi (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}] \\ &= k^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} + k^2 \sin \phi \cos \phi [k^2 \sin \phi \cos \phi (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-3/2}] \\ &= \frac{k^2 (1 - 2 \sin^2 \phi)}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} + \frac{k^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \\ &= \frac{k^2 [(1 - 2 \sin^2 \phi) (1 - k^2 \sin^2 \phi) + k^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi]}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
& k^2 [(1 - 2\sin^2 \phi)(1 - k^2 \sin^2 \phi) + k^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi] \\
&= k^2 [(1 - 2\sin^2 \phi) - k^2 \sin^2 \phi(1 - 2\sin^2 \phi) + k^2 \sin^2 \phi(1 - \sin^2 \phi)] \\
&= k^2 [(1 - 2\sin^2 \phi) + k^2 \sin^4 \phi] \\
&= 1 - 2k^2 \sin^2 \phi + k^4 \sin^4 \phi + k^2 - 1 \\
&= (1 - k^2 \sin^2 \phi)^2 + k^2 - 1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d}{d\phi} [k^2 \sin \phi \cos \phi (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}] = \frac{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^2 + k^2 - 1}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

Soit :

$$\frac{d}{d\phi} [k^2 \sin \phi \cos \phi (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}] = (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} + (k^2 - 1)(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-3/2}$$

Ceci nous amène donc à :

$$\frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = \frac{k^2}{k^2 - 1} \frac{\sin \phi \cos \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} - \frac{1}{k^2 - 1} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

En intégrant les deux membres de ϕ_1 à ϕ_2 , on a l'expression de C :

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = \frac{k^2}{k^2 - 1} \left[\frac{\sin \phi \cos \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-3/2}} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} - \frac{1}{k^2 - 1} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

$$\text{Soit : } C(k, \phi_1, \phi_2) = \frac{k^2}{k^2 - 1} \left[\frac{\sin \phi \cos \phi d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} - \frac{1}{k^2 - 1} E(k, \phi_1, \phi_2)$$

Donc B_x et B_y peuvent s'exprimer en fonction de E et F qui sont les modèles d'intégrales elliptiques respectivement des premier et deuxième types. Il en est de même pour B_z :

$$B_z = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega(r + \Omega - 2r \sin^2 \phi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi$$

$$B_z = \frac{1}{R^3} \left[\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2\Omega^2}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi + \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{-2r\Omega(1 - 2\sin^2 \phi)}{R^3(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} d\phi \right]$$

D'où :

$$B_z = -2\Omega^2 C(k, \phi_1, \phi_2) - \frac{2r\Omega}{R^3 k^2} B(k, \phi_1, \phi_2)$$

$$B_z = -2\Omega^2 C(k, \phi_1, \phi_2) - \frac{2r\Omega}{R^3 k^2} [(k^2 - 2)C(k, \phi_1, \phi_2) + 2F(k, \phi_1, \phi_2)]$$

$$B_z = \frac{-2[k^2(r\Omega + \Omega^2) - 2r\Omega]}{R^3 k^2} C(k, \phi_1, \phi_2) - \frac{4r\Omega}{R^3 k^2} F(k, \phi_1, \phi_2)$$

Finalement, on obtient un champ magnétique dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonction des intégrales elliptiques de première et deuxième espèces :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{2\Omega(z - z_0)}{R^3} \left[\sin \theta A(k, \phi_1, \phi_2) + \frac{\cos \theta}{k^2} [2F(k, \phi_1, \phi_2) + (k^2 - 2)C(k, \phi_1, \phi_2)] \right] \\ B_y = \frac{2\Omega(z - z_0)}{R^3} \left[-\cos \theta A(k, \phi_1, \phi_2) + \frac{\sin \theta}{k^2} [2F(k, \phi_1, \phi_2) + (k^2 - 2)C(k, \phi_1, \phi_2)] \right] \\ B_z = \frac{-2[k^2(r\Omega + \Omega^2) - 2r\Omega]}{R^3 k^2} C(k, \phi_1, \phi_2) - \frac{4r\Omega}{R^3 k^2} F(k, \phi_1, \phi_2) \end{array} \right.$$

6.1.3 Calculs

Le champ magnétique créé par le j -ième arc de cercle de l'anneau terminal du haut est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{ah}^j(x) = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} B_x^j \\ \vec{B}_{ah}^j(y) = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} B_y^j \\ \vec{B}_{ah}^j(z) = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} B_z^j \end{array} \right.$$

où B_x^j , B_y^j , et B_z^j désigne les composantes du champ, exprimées précédemment, calculées avec $\phi_1 = \theta_j$ et $\phi_2 = \theta_{j+1}$.

Le champ magnétique créé par le j -ième arc de cercle de l'anneau terminal

du bas est obtenu en remplaçant I_j par $-I_j$ et $\frac{L}{2}$ par $-\frac{L}{2}$, soit :

$$\begin{cases} B_{ab}^j(x) &= \frac{-\mu_0 I_j}{4\pi} B_x^j \\ B_{ab}^j(y) &= \frac{-\mu_0 I_j}{4\pi} B_y^j \\ B_{ab}^j(z) &= \frac{-\mu_0 I_j}{4\pi} B_z^j \end{cases}$$

Le champ magnétique créé par la j -ième branche est donné par la formule suivante :

$$\begin{cases} B_b^j(x) &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} 2i \exp\left(-\frac{i\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \frac{(-r \sin \theta + \Omega \sin \theta_j) \exp(i\theta_j) B_b x}{(r \cos \theta - \Omega \cos \theta_j)^2 + (r \sin \theta - \Omega \sin \theta_j)^2} \\ B_b^j(y) &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} 2i \exp\left(-\frac{i\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \frac{(r \cos \theta + \Omega \cos \theta_j) \exp(i\theta_j) B_b y}{(r \cos \theta - \Omega \cos \theta_j)^2 + (r \sin \theta - \Omega \sin \theta_j)^2} \\ B_b^j(z) &= 0 \end{cases}$$

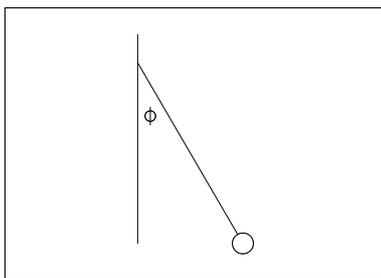
$$\begin{aligned} B_{bx} &= \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{(r \cos \theta - \Omega \cos \theta_j)^2 + (r \sin \theta - \Omega \sin \theta_j)^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \\ &\quad - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{(r \cos \theta - \Omega \cos \theta_j)^2 + (r \sin \theta - \Omega \sin \theta_j)^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \\ B_{by} &= \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{(r \cos \theta - \Omega \cos \theta_j)^2 + (r \sin \theta - \Omega \sin \theta_j)^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}} \\ &\quad - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{(r \cos \theta - \Omega \cos \theta_j)^2 + (r \sin \theta - \Omega \sin \theta_j)^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

Le champ magnétique total créé par l'antenne cage d'oiseau est donc donné par la formule suivante :

$$\overrightarrow{B(x, y, z)} = \sum_{j=1}^N \overrightarrow{B_{ah}^j} + \overrightarrow{B_{ab}^j} + \overrightarrow{B_b^j}$$

6.2 Calcul de la période d'oscillation d'un pendule

Les intégrales elliptiques ont d'autres applications. Considérons par exemple un problème physique très simple : celui du pendule oscillant. Si l'on ne suppose pas que les oscillations restent au voisinage de la position d'équilibre (approximation dite des "petits angles"), le calcul de la période d'oscillation conduit à une intégrale elliptique.



Soit un pendule constitué d'une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'une tige rigide de masse nulle et de longueur R . L'accélération de pesanteur est notée g . Initialement, la tige forme avec la position d'équilibre un angle α et le pendule est lâché sans vitesse initiale.

On travaille dans le repère de Frénet (\vec{u}_T, \vec{u}_N) et on repère la position du pendule par l'angle ϕ qu'il forme avec la position d'équilibre.

La vitesse de la masse ponctuelle est tangentielle :

$$\vec{v} = \vec{v}_T = R \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_T = v \vec{u}_T$$

Son accélération s'écrit donc :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + v \underbrace{\frac{d\vec{u}_T}{dt}}_{=a_N \vec{u}_N}$$

D'où l'accélération tangentielle qui sera la seule utile ici :

$$\vec{a}_T = \frac{d}{dt} \left(R \frac{d\phi}{dt} \right) \vec{u}_T$$

Le pendule est soumis à l'action de la pesanteur : $\vec{P} = m\vec{g}$, où \vec{g} est le vecteur de l'accélération de pesanteur, de norme g . La composante tangentielle du

poids est :

$$\vec{P} \cdot \vec{u}_T = mg \sin \phi$$

En outre, il subit également la tension de la tige, dont la composante ortho-radiale est nulle. Finalement, la projection sur la direction \vec{u}_T de la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} ma_T &= mg \sin \phi \\ mR \frac{d^2\phi}{dt^2} &= mg \sin \phi \end{aligned}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \underbrace{\frac{g}{R}}_{=\omega_0^2} \sin \phi = 0$$

En multipliant les deux membres par $\frac{d\phi}{dt}$ puis en intégrant par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\phi}{dt^2}\right) \frac{d\phi}{dt} - \omega_0^2 \sin \phi \frac{d\phi}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \omega_0^2 \cos \phi &= k \end{aligned}$$

Si l'angle maximal d'oscillation du pendule est α , alors en $\phi = \alpha$, on a $\frac{d\phi}{dt} = 0$, ce qui conduit à $k = -\omega_0^2 \cos \alpha$. D'où, en considérant la racine positive de la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \omega_0 \sqrt{2(\cos \phi - \cos \alpha)} \\ \text{soit : } \frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos \phi - \cos \alpha)}} &= \omega_0 dt \end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que ϕ passe de 0 à α est le quart de la période totale. D'où :

$$\omega_0 \frac{T}{4} = \int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \alpha}}$$

On utilise $\cos \phi = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$ et $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. En posant $p = \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)$, on a :

$$T = 2 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\phi}{\sqrt{p^2 - \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}}$$

On effectue le changement de variable : $\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) = p \sin \theta$. Alors quand $\phi = \alpha$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. En outre :

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \frac{d\phi}{2} &\leftrightarrow p \cos(\theta) d\theta \\ d\phi &\leftrightarrow \frac{2p \sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}} d\theta \\ d\phi &\leftrightarrow \frac{2 \sqrt{p^2 - \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)}}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}} d\theta \end{aligned}$$

Alors on trouve l'expression de T :

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}}$$

Elle fait effectivement intervenir une intégrale elliptique de première espèce :

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}, p^2\right)$$

Nos programmes de calcul de cette intégrale permettent de donner une valeur numérique approchée du résultat avec un angle initial de $\frac{\pi}{4}$ et $R = 0,5 \text{ m}$:

- la méthode des rectangles pour une subdivision en 10 sous-intervalles donne $T \simeq 1,4699 \text{ s}$;
- avec la même subdivision, la méthode des trapèzes donne $T \simeq 1,4752 \text{ s}$;
- la méthode arithmético-géométrique donne le même résultat en 4 itérations de la boucle seulement.