

---

# **Modèles d'écoulement dans les fissures en milieu poreux.**

---

Par Krell Stella, Minjeaud Sebastian

Stage de Master Première année réalisé  
au Centre de Mathématiques et d'Informatique  
à Marseille  
sous la tutelle de Madame Florence Hubert

Nous avons réalisé notre stage au CMI, Centre de Mathématiques et d'Informatique situé sur le technopôle de Château Gombert à Marseille.

Le CMI comprend 3 laboratoires :

- Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités.
  - Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille.
  - Laboratoire de Sciences de l'Information et des Systèmes.
- et une école doctorale en mathématiques et informatique.

Le laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités est composé de 4 équipes de recherche :

- Mathématiques Fondamentales.
- Analyse Appliquée.
- Théorie des Nombres.
- Probabilités et Statistiques.

Nous avons travaillé au sein de l'équipe d'Analyse Appliquée sous la direction de Florence Hubert.

Notre stage s'est déroulé sur 2 périodes. Pendant la première période, d'une durée de 6 semaines, nous avons étudié des modèles d'écoulement de fluide dans des milieux poreux fissurés. Nous avons travaillé principalement sur l'implémentation en C et en Matlab des méthodes de résolution des équations liées à ces modèles.

La seconde période, d'une durée de 2 semaines, nous a permis d'interpréter nos résultats et de commencer à rédiger ce rapport.

Ce stage a été pour nous une expérience très profitable. Nous avons non seulement effectué un travail intéressant dans des conditions agréables mais nous avons également pu nous faire une idée précise du métier de chercheur en mathématiques.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Position du problème</b>	<b>1</b>
1.1	Description, motivation et notations . . . . .	1
1.2	Modèle “complet”, les équations de l’écoulement . . . . .	1
1.2.1	Equation de conservation de la masse . . . . .	1
1.2.2	Equation de Darcy . . . . .	2
1.2.3	Conditions aux limites . . . . .	2
1.2.4	Modèle “Complet” . . . . .	2
1.3	Influence de quelques paramètres . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Approximation du modèle complet par des éléments finis mixtes</b>	<b>6</b>
2.1	Formulation variationnelle mixte . . . . .	6
2.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	7
2.3	Eléments finis de Raviart-Thomas . . . . .	10
2.4	Discrétisation . . . . .	12
2.5	Premiers résultats. Influence de la largeur de la fissure . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Modèle asymptotique</b>	<b>15</b>
3.1	Principe du modèle . . . . .	15
3.2	Loi de conservation . . . . .	15
3.3	Loi de Darcy . . . . .	16
3.4	Conditions de raccord au niveau de la fissure . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Approximation du modèle asymptotique</b>	<b>19</b>
4.1	Résolution par éléments finis . . . . .	19
4.1.1	Formulation variationnelle mixte . . . . .	19
4.1.2	Existence et unicité de la solution . . . . .	21
4.1.3	Discrétisation . . . . .	24
4.2	Résolution par volumes finis . . . . .	25
4.2.1	Rappel sur les volumes finis en dimension 1 pour le laplacien . . . . .	25
4.2.2	Présentation d’un schéma volumes finis en dimension 2 . . . . .	27
4.2.3	Prise en compte de la fissure . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Comparaisons des différentes approximations</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>38</b>

# 1 Position du problème

## 1.1 Description, motivation et notations

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide en régime permanent dans un milieu poreux fissuré. On se place en dimension 2. Nous considérons le cas d'une fissure droite "totale" qui partage le domaine en deux composantes distinctes.

Le milieu est caractérisé par sa perméabilité  $k$  et le fluide par sa viscosité  $\mu$ ;  $k$  et  $\mu$  sont des données du problème.

Les grandeurs qui caractérisent l'écoulement du fluide sont sa pression  $p$  et sa vitesse  $\vec{u}$  en chaque point du milieu. Ce seront donc les inconnues du problème.

La connaissance quantitative de l'écoulement d'un fluide en milieu poreux trouve de nombreuses applications notamment en géologie (gestion des nappes phréatiques, écoulement souterrain), en ingénierie pétrolière et peut aider à la compréhension des phénomènes géophysiques comme le volcanisme, la tectonique des plaques. La modélisation et les simulations mathématiques sont fondamentales pour la compréhension et la gestion de ces phénomènes du monde souterrain. De plus, les études de propagation de polluants (stockage des déchets nucléaires, propagation dans les nappes phréatiques) nécessitent une étude préalable de l'écoulement des fluides qui les transportent.

Pour fixer les idées, notre milieu est représenté par le domaine  $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$ . Sa frontière  $\partial\Omega$  est aussi noté  $\Gamma$ , avec la convention  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . La frontière  $\Gamma_D$  représente la partie de la frontière sur laquelle on connaît la pression (condition de Dirichlet) et  $\Gamma_N$  représente la partie de la frontière sur laquelle on connaît la composante normale de la vitesse (condition de Neumann,  $\vec{u} \cdot \vec{n} = -K_n \frac{\partial p}{\partial n}$ ). La fissure considérée est verticale. Les grandeurs relatives à la fissure seront indicées d'un "f".

Le domaine  $\Omega$  est découpé en trois parties notées  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_f$ , voir figure 1. La frontière commune à  $\Omega_1$  (resp  $\Omega_2$ ) et  $\Omega_f$  est notée  $\gamma_1 = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_f}$  (resp  $\gamma_2$ ), la normale extérieure à  $\Omega_1$  (resp  $\Omega_2$ ) sur  $\gamma_1$  (resp  $\gamma_2$ ) est notée  $\vec{n}_1$  (resp  $\vec{n}_2$ ). On note par convention  $\vec{n} = \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ .

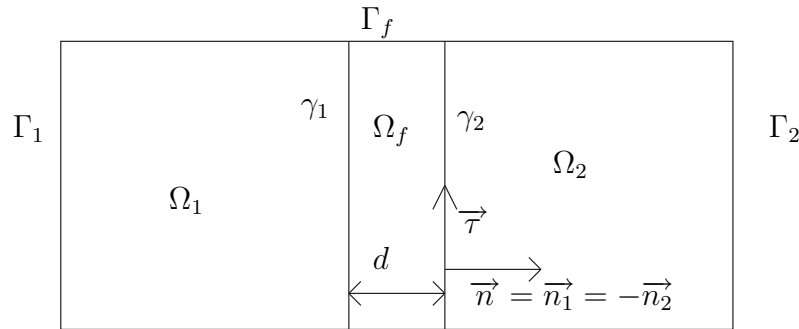


FIG. 1 – Domaine  $\Omega$

## 1.2 Modèle "complet", les équations de l'écoulement

On suppose que l'écoulement du fluide, aussi bien dans le milieu que dans la fissure, est régi par la loi de Darcy (modèle adapté aux milieux poreux et aux écoulements lents).

### 1.2.1 Equation de conservation de la masse

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{u} = q \quad \text{dans } \Omega}$$

où

- $\vec{u}$  est la vitesse du fluide,
- $q$  est une fonction puits/source liée à la masse de fluide prélevée/injectée.

Cette équation est valable en régime permanent. Elle traduit le fait que la masse de fluide prélevée ou injectée dans chaque volume élémentaire doit être égale aux flux massiques traversant la surface de ce volume.

### 1.2.2 Equation de Darcy

$$\vec{u} = -K \overrightarrow{\text{grad}} p \quad \text{dans } \Omega$$

où

- $\vec{u}$  est la vitesse du fluide,
- $p$  est la pression du fluide,
- $K$  est la conductivité hydraulique ou coefficient de perméabilité. Il prend en compte (dans certaines mesures) l'interaction entre le fluide et la roche.

L'équation de Darcy relie la vitesse du fluide à son gradient de pression. Elle a été énoncée par Darcy en 1856, suite à des mesures effectuées sur l'écoulement de l'eau dans une colonne de sable, sous la forme :

$$\frac{Q}{S} = \frac{k \Delta P}{\mu \Delta x}$$

- $Q$  représente le débit d'écoulement du fluide à travers la section  $S$ ,
- $\frac{\Delta P}{\Delta x}$  représente le gradient de pression,
- $k$  est la perméabilité intrinsèque de la roche (mesurée en *Darcy* ou  $m^2$ ).
- $\mu$  est la viscosité (dynamique) du fluide.

Le coefficient de perméabilité  $K$  s'exprime donc comme le rapport de la perméabilité intrinsèque  $k$  et de la viscosité du fluide  $\mu$ .

$$K = \frac{k}{\mu}$$

Dans un milieu isotrope, la conductivité hydraulique est un scalaire, mais dans un milieu anisotrope, elle est un tenseur symétrique. On se limitera ici à des tenseurs diagonaux.

### 1.2.3 Conditions aux limites

La pression  $p$  est imposée sur  $\Gamma_D$ . On parle de condition aux limites de type Dirichlet.

$$p = p_D \quad \text{sur } \Gamma_D$$

Ce type de condition se rencontre, par exemple, lorsque une nappe phréatique est en contact avec une rivière.

La composante normale de la vitesse est donnée sur la frontière  $\Gamma_N$ . On parle de condition aux limites de type Neumann.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_N \quad \text{sur } \Gamma_N$$

Cette condition peut correspondre à un prélèvement ou une injection à travers la frontière. Une condition de Neumann homogène ( $u_N = 0$ ) simule par exemple un contact avec une frontière imperméable.

### 1.2.4 Modèle "Complet"

On aura donc à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{llll} \text{div } \vec{u} = q & \text{dans } \Omega & \text{(loi de conservation de masse)} & \\ \vec{u} = -K \overrightarrow{\text{grad}} p & \text{dans } \Omega & \text{(loi de Darcy)} & \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D & \text{(condition de Dirichlet)} & \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = u_N & \text{sur } \Gamma_N & \text{(condition de Neumann)} & \end{array} \quad (1)$$

Les inconnues sont la vitesse  $\vec{u}$  et la pression  $p$  du fluide. On ne considérera que des tenseurs de perméabilité diagonaux, de la forme

$$K = \begin{pmatrix} K_\tau & 0 \\ 0 & K_n \end{pmatrix}$$

avec  $K_\tau$  et  $K_n$  les perméabilités du milieu dans les directions tangentielle et normale à la fissure.

Remarque :

Le fait de considérer que le tenseur  $K$  est de cette forme, implique que l'on choisit de travailler dans la base  $(\vec{\tau}, \vec{n})$  qui ne coïncide pas, en général, avec la base usuelle  $(\vec{x}, \vec{y})$ .

### 1.3 Influence de quelques paramètres

Pour montrer l'influence de la perméabilité dans la direction normale  $K_n$ , on s'intéresse au problème suivant :

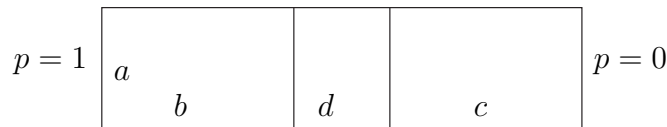
$\text{div } \vec{u} = 0$	dans $\Omega$	
$\vec{u} = -K \overrightarrow{\text{grad}} p$	dans $\Omega$	
$p = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = b + d + c \end{cases}$		(2)
$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	si $y = 0$ ou $a$	

avec

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_1 \text{ et } \Omega_2$$

$$= \begin{pmatrix} K_{f\tau} & 0 \\ 0 & K_{fn} \end{pmatrix} \quad \text{dans } \Omega_f$$

Neumann homogène



Neumann homogène

FIG. 2 – Conditions limites

#### Proposition 1.1

*La solution du problème (2) est affine par morceaux.*

$$p(x, y) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1, & \text{si } x \in \Omega_1 \\ \alpha_f x + \beta_f, & \text{si } x \in \Omega_f \\ \alpha_2 x + \beta_2, & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

#### Démonstration :

Il suffit de voir que  $p$ , défini ainsi, est une solution du problème (2). L'unicité (démontrer par la suite) des solutions de (2) nous dit que c'est la seule.

La dérivée de  $p$  par rapport à  $y$  est nulle, car  $p$  ne dépend pas de  $y$ .

De plus, soit  $\varphi \in C_c^\infty$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x p, \varphi \rangle &= - \langle p, \partial_x \varphi \rangle \\
&= - \int_0^a \int_0^b (\alpha_1 x + \beta_1) \partial_x \varphi \, dx \, dy \\
&\quad - \int_0^a \int_b^{b+d} (\alpha_f x + \beta_f) \partial_x \varphi \, dx \, dy \\
&\quad - \int_0^a \int_{b+d}^{b+d+c} (\alpha_2 x + \beta_2) \partial_x \varphi \, dx \, dy \\
&= - \int_0^a \left( \underbrace{[(\alpha_1 x + \beta_1) \varphi]_0^b}_{=0} - \int_0^b \alpha_1 \varphi \, dx \, dy \right) - \dots \\
&= \alpha_1 \int_{\Omega_1} \varphi \, dx + \alpha_f \int_{\Omega_f} \varphi \, dx + \alpha_2 \int_{\Omega_2} \varphi \, dx
\end{aligned}$$

On obtient donc le gradient de la pression  $p$  constant par morceaux.

$$K \nabla p = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{1}_{\Omega_1} + \alpha_f K_{fn} \mathbf{1}_{\Omega_f} + \alpha_2 \mathbf{1}_{\Omega_2} \\ 0 \end{pmatrix} = -u$$

On calcule maintenant la divergence de  $u$ .

Comme  $u_2 = 0$ , alors  $\partial_y u_2 = 0$ , et donc  $\operatorname{div} u = \partial_x u_1$ . Or

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x u_1, \varphi \rangle &= - \langle u_1, \partial_x \varphi \rangle \\
&= -\alpha_1 \int_0^a \int_0^b \partial_x \varphi \, dx \, dy \\
&\quad - \alpha_f K_{fn} \int_0^a \int_b^{b+d} \partial_x \varphi \, dx \, dy \\
&\quad - \alpha_2 \int_0^a \int_{b+d}^{b+d+c} \partial_x \varphi \, dx \, dy \\
\langle \partial_x u_1, \varphi \rangle &= -\alpha_1 \int_0^a \varphi(b, y) \, dy \\
&\quad - \alpha_f K_{fn} \int_0^a \varphi(b+d, y) \, dy + \alpha_f K_{fn} \int_0^a \varphi(b, y) \, dy \\
&\quad + \alpha_2 \int_0^a \varphi(b+d, y) \, dy \\
&= (\alpha_f K_{fn} - \alpha_1) \int_0^a \varphi(b, y) \, dy + (-\alpha_f K_{fn} + \alpha_2) \int_0^a \varphi(b+d, y) \, dy
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\langle \operatorname{div} u, \varphi \rangle = (\alpha_f K_{fn} - \alpha_1) \int_0^a \varphi(b, y) \, dy + (-\alpha_f K_{fn} + \alpha_2) \int_0^a \varphi(b+d, y) \, dy.$$

Or on veut  $\operatorname{div} u = 0$ , ainsi on a  $\forall \varphi \in C_c^\infty$  :

$$(\alpha_f K_{fn} - \alpha_1) \int_0^a \varphi(b, y) \, dy + (-\alpha_f K_{fn} + \alpha_2) \int_0^a \varphi(b+d, y) \, dy = 0.$$

On prend  $\varphi \in C_c^\infty(]0, a[ \times ]0, b])$ , on a alors

$$\alpha_1 = \alpha_f K_{fn}$$

puis  $\varphi \in C_c^\infty(]0, a[ \times [b+d, c[)$ , on a alors

$$\alpha_2 = \alpha_f K_{fn}$$

Ce qui nous donne la relation :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_f K_{fn}$$

Et réciproquement, cette relation implique  $\text{div } u = 0$ .

De plus, il faut que  $p$  satisfasse les conditions limites :  $p(0) = 1$  et  $p(b + c + d) = 0$ , par conséquent :

$$\begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \alpha_2(b + c + d) + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

La continuité de la pression donne deux autres équations :

$$\begin{cases} \alpha_1 b + \beta_1 = \alpha_f b + \beta_f \\ \alpha_2(b + d) + \beta_2 = \alpha_f(b + d) + \beta_f \end{cases}$$

On remplace  $\beta_1$  par sa valeur dans la première équation.

$$\alpha_1 b + 1 = \alpha_f b + \beta_f$$

De même, pour  $\beta_2$  dans la deuxième équation.

$$-\alpha_2 c = \alpha_f(b + d) + \beta_f$$

On remplace  $\alpha_2$  par sa valeur et on soustrait les deux équations, on trouve ainsi  $\alpha_f$  :

$$\alpha_f = \frac{-1}{K_{fn}(b + c) + d}$$

On en déduit  $\beta_f$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :

$$\beta_f = b \frac{1 - K_{fn}}{K_{fn}(b + c) + d} + 1$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-K_{fn}}{K_{fn}(b + c) + d}$$

D'où

$$\beta_2 = \frac{K_{fn}(b + d + c)}{K_{fn}(b + c) + d}$$

□

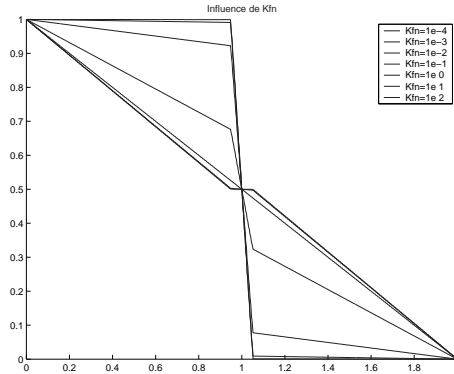


FIG. 3 – Influence de  $K_{fn}$

La figure 3 représente la solution du problème (2) (pour  $y$  fixé) en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $K_{fn}$ .

- Lorsque  $K_{fn}$  tend vers 0, la pression décroît plus vite dans la fissure que dans le milieu. Il y a un saut de pression à travers la fissure. La fissure est imperméable.
- Lorsque  $K_{fn} = 1$ , la fissure est invisible. Le fluide s'écoule comme s'il n'y avait pas de fissure.
- Lorsque  $K_{fn}$  tend vers l'infini, la pression décroît moins vite dans la fissure. Il y a un palier dans la fissure. Il n'y a plus de saut de pression. La fissure est perméable.



## 2 Approximation du modèle complet par des éléments finis mixtes

Nous exposons dans cette section une méthode de type éléments finis mixtes ([4]) pour approcher la solution du système d'équations du problème (1).

### 2.1 Formulation variationnelle mixte

Nous cherchons une formulation variationnelle du problème (1). Elle est obtenue en multipliant chacune des équations par des “fonctions-tests”, à valeurs vectorielles pour la première équation ( “conservation de la masse”) et à valeurs scalaires pour la seconde ( “loi de Darcy”), puis en intégrant sur le domaine  $\Omega$ . Ces “fonctions-tests”  $v$  et  $r$  sont des éléments génériques d'espaces fonctionnels  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{M}$  qui seront définis ultérieurement. On obtient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} K^{-1}u v \, dx = - \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} p v \, dx & , \forall v \in \mathcal{V} \\ \int_{\Omega} \text{div } u r \, dx = \int_{\Omega} q r \, dx & , \forall r \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

La première équation devient, d'après la formule de Green :

$$\int_{\Omega} K^{-1}u v \, dx = - \int_{\partial\Omega} p v.n \, dx + \int_{\Omega} p \text{div } v \, dx$$

ou encore, en distinguant  $\Gamma_D$  (frontière sur laquelle  $p$  vaut  $p_D$  avec  $p_D \in L^2(\Gamma_D)$ ) de  $\Gamma_N$ ,

$$\int_{\Omega} K^{-1}u v \, dx = - \int_{\Gamma_N} p v.n \, dx - \int_{\Gamma_D} p_D v.n \, dx + \int_{\Omega} p \text{div } v \, dx.$$

Cependant, aucune condition n'est à imposer sur la valeur de  $p$  sur  $\Gamma_N$ , nous supposons donc que  $v.n = 0$  sur  $\Gamma_N$ .

On obtient la formulation variationnelle mixte suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{U} \text{ et } p \in \mathcal{P} & \text{tels que} \\ \int_{\Omega} K^{-1}u v \, dx - \int_{\Omega} p \text{div } v \, dx = - \int_{\Gamma_D} p_D v.n \, dx & , \forall v \in \mathcal{V} \\ - \int_{\Omega} \text{div } u r \, dx = - \int_{\Omega} q r \, dx & , \forall r \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Il reste maintenant à choisir les espaces  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{M}$ . Tout d'abord, les intégrales écrites ci-dessus doivent avoir un sens ; un choix classique consiste à prendre, pour  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ , des sous-espaces de

$$H(\text{div}, \Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^2 \mid \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$$

et, pour  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{M}$  des sous-espaces de  $L^2(\Omega)$ . De plus, ces espaces doivent permettre d'imposer les conditions sur la frontière de Neumann et de vérifier les hypothèses faites en cours de calcul (ici,  $v.n = 0$  sur  $\Gamma_N$ ). La condition de Dirichlet est prise en compte par la formulation variationnelle, par contre celle de Neumann reste à imposer dans le choix des espaces fonctionnels.

On choisit donc avec  $u_N \in L^2(\Gamma_N)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= H_{u_N, N}(\Omega) = \{v \in H(\text{div}, \Omega), v.n = u_N \text{ sur } \Gamma_N\} \\ \mathcal{V} &= H_{0, N}(\Omega) = \{v \in H(\text{div}, \Omega), v.n = 0 \text{ sur } \Gamma_N\} \\ \mathcal{M} &= \mathcal{P} = L^2(\Omega). \end{aligned}$$

La formulation variationnelle est donc la suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_{u_N, N}(\Omega) \text{ et } p \in L^2(\Omega) & \text{tels que} \\ \int_{\Omega} K^{-1}u v \, dx - \int_{\Omega} p \text{div } v \, dx = - \int_{\Gamma_D} p_D v.n \, dx & , \forall v \in H_{0, N}(\Omega), \\ - \int_{\Omega} \text{div } u r \, dx = - \int_{\Omega} q r \, dx & , \forall r \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Trouver } u \in H_{u_N, N}(\Omega) \quad \text{et} \quad p \in L^2(\Omega) \quad \text{tels que} \\ \alpha(u, v) + \beta(v, p) &= L_d(v) \quad , \forall v \in H_{0, N}(\Omega) \\ \beta(u, r) &= L_q(r) \quad , \forall r \in L^2(\Omega) \end{aligned}} \quad (3)$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) &= \int_{\Omega} K^{-1} u v \, dx \\ \beta(u, r) &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} u r \, dx \\ L_d(v) &= - \int_{\Gamma_D} p_D v \cdot n \, dx \\ L_q(r) &= - \int_{\Omega} q r \, dx \end{aligned}$$

On se ramène, par un changement d'inconnue, à des conditions aux bords de Neumann homogène sur  $\Gamma_N$ . Il existe une fonction  $u_0$  de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  telle que  $u_0|_{\Gamma_N} = u_N$  avec  $u_N \in L^2(\Gamma_N)$ , ie  $u_0 \in H_{u_N, N}(\Omega)$  et on fait le changement d'inconnue :  $U = u - u_0$ . On cherche alors à résoudre le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in H_{0, N}(\Omega) \quad \text{et} \quad p \in L^2(\Omega) \quad \text{tels que} \\ \alpha(U, v) + \beta(v, p) = L_{d,0}(v) \quad , \forall v \in H_{0, N}(\Omega) \\ \beta(U, r) = L_{q,0}(r) \quad , \forall r \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} L_{d,0}(v) &= L_d(v) - \alpha(u_0, v) \\ L_{q,0}(r) &= L_q(r) - \beta(u_0, r) \end{aligned}$$

Ce changement d'inconnue modifie les formes linéaires du second membre mais le problème mixte est plus facile à étudier car l'inconnue et les "fonctions-tests" sont des éléments du même ensemble qui est de plus un espace vectoriel.

## 2.2 Existence et unicité de la solution

On s'intéresse dans ce paragraphe aux propriétés mathématiques du problème suivant noté (P) :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{V} \quad \text{et} \quad p \in \mathcal{M} \quad \text{tels que} \\ \alpha(u, v) + \beta(v, p) = L(v) \quad , \forall v \in \mathcal{V} \\ \beta(u, r) = F(r) \quad , \forall r \in \mathcal{M} \end{array} \right.$$

où l'on suppose que les espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{M}$  sont de Hilbert, que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des formes bilinéaires continues et que  $L$  et  $F$ , les second membres, sont linéaires continus.

On remarque que pour tout  $u \in \mathcal{V}$ , l'application  $v \mapsto \alpha(u, v)$  est linéaire continue ; il existe donc, d'après le théorème de Riesz, un unique vecteur noté  $Au$  tel que  $\forall v \in \mathcal{V}, \alpha(u, v) = (Au, v)_{\mathcal{V}}$ . De plus,  $\alpha$  étant bilinéaire continue, l'opérateur  $A$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}$  est linéaire continu avec  $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})} = \|\alpha\|$ .

De même,  $\beta$  étant bilinéaire continue,  $\beta : \mathcal{V} \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$  on introduit les opérateurs  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{M})$ ,  $B : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{M}$  et son adjoint  ${}^t B \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{V})$  tels que

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall r \in \mathcal{M}, \quad \begin{aligned} \beta(v, r) &= (Bv, r)_{\mathcal{M}} \\ &= (v, {}^t B r)_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

ainsi que les vecteurs  $l \in \mathcal{V}$  et  $f \in \mathcal{M}$  tels que

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{V}, \quad L(v) &= (l, v)_{\mathcal{V}} \\ \forall r \in \mathcal{M}, \quad F(r) &= (f, r)_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Le problème peut alors se formuler de la manière suivante en termes d'opérateurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathcal{V}(\Omega) \quad \text{et} \quad p \in \mathcal{M} \quad \text{tels que} \\ Au + B^t p = l \\ Bu = f \end{array} \right.$$

On pose alors,

$$\begin{aligned} Z &= \{v \in \mathcal{V} \text{ tel que } \beta(v, r) = 0, \forall r \in \mathcal{M}\} = \{v \in \mathcal{V} \text{ tel que } Bv = 0\} = \text{Ker } B \\ Z_f &= \{v \in \mathcal{V} \text{ tel que } \beta(v, r) = F(r), \forall r \in \mathcal{M}\} = \{v \in \mathcal{V} \text{ tel que } Bv = f\} \end{aligned}$$

Le problème précédent (P) peut être associé au problème (P') :

$$(P') \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in Z_f \text{ tel que} \\ \alpha(u, v) = L(v), \forall v \in Z \end{cases}$$

Supposons que  $Z_f$  est non vide et choisissons  $u_0 \in Z_f$  alors, en posant  $U = u - u_0$ , le problème (P') est alors équivalent au problème suivant noté (Q) :

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{Trouver } U \in Z \text{ tel que} \\ \alpha(U, v) = L(v) - \alpha(u_0, v), \forall v \in Z \end{cases}$$

L'espace  $Z$  étant fermé dans  $\mathcal{V}$ , on peut appliquer le théorème de Lax Milgram au problème (Q) sous l'hypothèse que la forme bilinéaire  $\alpha$  est coercive sur  $Z = \text{Ker } B$ .

Nous avons donc le résultat suivant : Le problème associé (P') admet une unique solution  $u \in Z_f$  sous les hypothèses  $Z_f$  non vide et  $\alpha$  coercive sur  $Z$ .

Une hypothèse supplémentaire sur la fonction  $\beta$  suffit pour conclure à l'existence et l'unicité de la solution du problème initial (P). En effet, on va supposer que  $\beta$  vérifie la condition "inf-sup" :

$$\exists C > 0, \inf_{r \in \mathcal{M}} \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{\beta(v, r)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|r\|_{\mathcal{M}}} \geq C$$

Cette condition permet d'affirmer que  $Z_f$  est non vide pour tout  $f \in \mathcal{M}$  et que si on choisit la solution unique  $u$  du problème (P') alors il existe une unique fonction  $p \in \mathcal{M}$  telle que  $(u, p)$  est solution du problème initial.

On a donc en résumé le théorème suivant :

### **Théorème 2.1**

*Si  $\alpha$  est une forme bilinéaire, continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  et coercive sur  $Z = \{v \in \mathcal{V} \text{ tel que } \beta(v, r) = 0, \forall r \in \mathcal{M}\}$ , si  $\beta$  est une forme bilinéaire, continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{M}$  et vérifie la condition inf-sup :*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \inf_{r \in \mathcal{M}} \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{\beta(v, r)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|r\|_{\mathcal{M}}} \geq C$$

*alors le problème (P) admet un unique couple solution dans  $\mathcal{V} \times \mathcal{M}$ .*

La preuve n'est pas développée ici, on pourra se reporter aux ouvrages cités en référence ([3] et [5]). Appliquons ce théorème au problème (3) considéré dans le paragraphe précédent :

### **Proposition 2.2**

*Si il existe  $0 < K_{min} < K_{max}$  tel que  $\forall 1 \leq i \leq 2, 0 < K_{min} \leq K_{ii} \leq K_{max}$  alors le problème (3) admet une solution unique.*

### **Démonstration :**

L'espace  $H_{0,N}(\Omega)$  muni de la norme :

$$\|u\|_{H_{0,N}(\Omega)}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } u\|_{0,\Omega}^2$$

est un espace de Hilbert.

L'application  $\alpha$

$$\begin{aligned} |\alpha(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} K^{-1} u v \, dx \right| \\ &\leq K_{min}^{-1} \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq K_{min}^{-1} \|u\|_{H_{0,N}(\Omega)} \|v\|_{H_{0,N}(\Omega)} \end{aligned}$$

$\alpha$  est une forme bilinéaire continue.

Montrons la coercivité de  $\alpha$  sur  $Z$ .

Soit  $v \in Z$ ,  $\beta(v, r) = -\int_{\Omega} \operatorname{div} v r \, dx = 0$ ,  $\forall r \in L^2(\Omega)$ , et donc  $\|\operatorname{div} v\|_{0,\Omega} = 0$ , alors on a  $\|v\|_{0,\Omega}^2 = \|v\|_{H_{0,N}(\Omega)}^2$

$$\begin{aligned} \alpha(v, v) &= \int_{\Omega} K^{-1} v v \, dx \\ &\geq K_{max}^{-1} \|v\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq K_{max}^{-1} \|v\|_{H_{0,N}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Comme  $K_{max}^{-1} > 0$ , alors  $\alpha$  est coercive sur  $Z$ .

L'application  $\beta$

$$\begin{aligned} |\beta(u, r)| &= \left| -\int_{\Omega} \operatorname{div} u r \, dx \right| \\ &\leq \|\operatorname{div} u\|_{0,\Omega} \|r\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|u\|_{H_{0,N}(\Omega)} \|r\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

$\beta$  est une forme bilinéaire continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{M}$ .

Pour montrer que  $\beta$  vérifie la condition inf-sup, on va utiliser le lemme suivant.

### Lemme 2.3

Pour tout  $r$  dans  $L^2(\Omega)$ , il existe  $v$  dans  $H_{0,N}(\Omega)$  tel que :  $\beta(v, r) = \|r\|_{0,\Omega}^2$  et  $\|v\|_{H_{0,N}(\Omega)} \leq C \|r\|_{0,\Omega}$

### Démonstration :

Soit  $r \in L^2(\Omega)$ .

Il existe  $\varphi \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = r \text{ dans } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}$$

On veut trouver  $v \in \mathcal{V}$  tel que  $\beta(v, r) = \|r\|_{0,\Omega}^2$ , cela revient à imposer  $-\operatorname{div} v = r$ , dans ce cas on a,

$$\int_{\Omega} r = -\int_{\Omega} \operatorname{div} v$$

D'après la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} r &= -\int_{\Gamma} v \cdot n \\ \text{Or } \int_{\Omega} r &= -\int_{\Omega} \Delta \varphi \\ &= -\int_{\Gamma} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot n \end{aligned}$$

Essayons donc  $v = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi$ . On a bien  $v \in H_{0,N}(\Omega)$  et  $\beta(v, r) = \|r\|_{0,\Omega}^2$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_{0,N}(\Omega)}^2 &= \|r\|_{0,\Omega}^2 + \|\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C(\Omega) \|r\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

En effet,  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma_D$ , on a donc, en utilisant l'inégalité de Poincaré et  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot n = 0$  sur  $\Gamma_N$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi &= \int_{\Omega} \Delta \varphi \varphi \\ \int_{\Omega} |v|^2 &= \int_{\Omega} r \varphi \\ &\leq \|r\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|r\|_{0,\Omega} \|\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|r\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

□

Revenons à la démonstration de la proposition 2.2.

Soit  $r \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} \sup_{w \in H_{0,N}(\Omega)} \frac{\beta(w, r)}{\|w\|_{H_{0,N}(\Omega)} \|r\|_{0,\Omega}} &\geq \frac{\beta(v, r)}{\|v\|_{H_{0,N}(\Omega)} \|r\|_{0,\Omega}} \\ &\geq \frac{\|r\|_{0,\Omega}}{\|v\|_{H_{0,N}(\Omega)}} \\ &\geq C \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\inf_{r \in L^2(\Omega)} \sup_{v \in H_{0,N}(\Omega)} \frac{\beta(v, r)}{\|v\|_{H_{0,N}(\Omega)} \|r\|_{0,\Omega}} \geq C$$

On a donc démontré que  $\alpha$  est une forme bilinéaire, continue et coercive et que  $\beta$  est une forme bilinéaire, continue vérifiant la condition inf-sup. On en déduit donc l'existence et unicité de la solution.

□

## 2.3 Éléments finis de Raviart-Thomas

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\mathbb{P}_k$  l'ensemble des polynômes, à deux indéterminés notées  $x$  et  $y$ , de degré au plus  $k$  en l'ensemble des variables.

### Définition 2.4

Soit  $\mathcal{K}$  un triangle.

On note  $P$  le sous-ensemble de  $(\mathbb{P}_1)^2$  défini par :

$$P = \mathbb{P}_0^2 \oplus \mathbb{P}_0 \vec{X}, \text{ avec } \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,  $\varphi \in P$  s'écrit  $\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  avec  $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ .

De plus, on désigne par  $\Sigma$  l'ensemble de formes linéaires (définies sur  $P$ ) suivant

$$\Phi = \{\phi_i : \varphi \mapsto \overrightarrow{\varphi(m_i)} \cdot \vec{n}_i, \forall i \in \{1, 2, 3\}\}$$

avec  $\vec{n}_i$  la normale à l'arête  $\sigma_i$ ,  $m_i$  le milieu de l'arête  $\sigma_i$  représenté dans la figure 4.

Le triplet  $\{\mathcal{K}, P, \Sigma\}$  est appelé élément fini de Raviart-Thomas d'ordre 1.

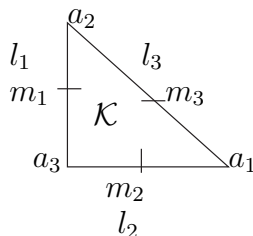


FIG. 4 – Notation

### Lemme 2.5

Pour tout  $\varphi \in P$ ,  $\varphi(x) \cdot \vec{n}_i$  est constant sur l'arête  $\sigma_i$ .

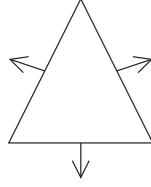


FIG. 5 – Représentation de l'élément fini de Raviart-Thomas

**Démonstration :**

Soit  $p \in P$ ,  $p(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on pose  $\vec{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Soit  $X \in \sigma_i$ , alors  $\overrightarrow{a_{i+1}X} \cdot \vec{n}_i = 0$ .

En particulier,

$$\begin{aligned} p(X) \cdot \vec{n}_i &= \vec{A} \cdot \vec{n}_i + \lambda \overrightarrow{X} \cdot \vec{n}_i \\ &= \vec{A} \cdot \vec{n}_i + \lambda \overrightarrow{a_{i+1}X} \cdot \vec{n}_i + \lambda \underbrace{\overrightarrow{a_{i+1}X} \cdot \vec{n}_i}_{=0, X \in \sigma_i} \\ &= \vec{A} \cdot \vec{n}_i + \lambda \overrightarrow{a_{i+1}X} \cdot \vec{n}_i \end{aligned}$$

□

Ce lemme 2.5 constitue une des raisons pour lesquelles il est intéressant d'utiliser les éléments de Raviart-Thomas. Ils permettent d'assurer la conservation du flux discret à travers les arêtes.

**Proposition 2.6**

*Le triplet  $\{\mathcal{K}, P, \Sigma\}$  est un élément fini.*

**Démonstration :**

Montrons que  $\Sigma$  est  $P$ -unisolvant.

Soit  $p \in P$  tel que  $\overrightarrow{p(m_i)} \cdot \vec{n}_i = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ .

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} a + \lambda x \\ b + \lambda y \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de Green :

$$\forall v \in H^1(\mathcal{K}), \int_{\mathcal{K}} \overrightarrow{\text{grad}} v \cdot \vec{p} \, dx + \int_{\mathcal{K}} v \underbrace{\text{div} \vec{p}}_{2\lambda} \, dx = \int_{\partial\mathcal{K}} v \, p \cdot n \, d\gamma = 0.$$

Or la fonction  $v = 1$  appartient à l'espace  $H^1(\mathcal{K})$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} v = 0$ , d'où :

$$\int_{\mathcal{K}} \text{div} \vec{p} \, dx = 0.$$

On en déduit que  $\lambda = 0$  et donc  $p$  est constant et égal à  $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Or  $p \cdot n_1 = p \cdot n_2 = 0$  par conséquent  $A = 0, p = 0$ .

L'espace vectoriel  $P$  étant de dimension 3, on a bien obtenu l'unisolvance. Le triplet  $\{\mathcal{K}, P, \Sigma\}$  est bien un élément fini.

□

**Fonctions de base de Raviart-Thomas :**

– Fonctions de base liées à l'élément fini  $\mathcal{K}$  :

Les fonctions de base de Raviart-Thomas sont les éléments  $(\varphi_j)_{j \in \{1,2,3\}}$  de  $P$  caractérisés par

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad \Phi_j(\varphi_i) = \delta_{ij}.$$

On dit que la fonction de base  $\varphi_i$  est associée au noeud  $m_i$ . Les noeuds du triangle  $\mathcal{K}$  sont donc les milieux des arêtes de  $\mathcal{K}$ .

La fonction de base associée au noeud  $m_i$ , le milieu du segment  $[a_{i+1}; a_{i+2}]$ , est donnée par la formule suivante :

$$\varphi_i(x) = \frac{l_i}{2mes(\mathcal{K})} \overrightarrow{a_i x} \quad \text{si } x \in \mathcal{K} \text{ et } \mathcal{K} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

On vérifie qu'elle est caractérisée par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(m_1) \cdot \vec{n}_1 &= \varphi_1(a_3) \cdot \vec{n}_1 = \varphi_1(a_2) \cdot \vec{n}_1 &= 1 \\ \varphi_1(m_2) \cdot \vec{n}_2 &= \varphi_1(m_3) \cdot \vec{n}_3 &= 0 \end{aligned}$$

– Fonctions de base liées à la triangulation :

Pour définir les fonctions de base liées à la triangulation, il faut fixer une orientation. En effet, les noeuds de la triangulation sont les milieux de chaque arête. La fonction de base  $\varphi_I(J) \cdot \vec{n}_J = \delta_{IJ}$ ,  $\vec{n}_J$  étant une normale à l'arête contenant le noeud  $J$ . Il existe donc deux possibilités pour choisir  $\vec{n}_J$ . (Cette orientation peut-être fixée par l'ordre de parcours des éléments dans la mise en oeuvre de la méthode).

Avec les notations de la figure 6,  $\varphi_I$  est donnée par la formule :

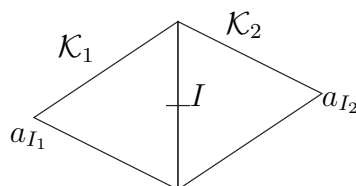


FIG. 6 – Notation

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} \frac{l_I}{2mes(\mathcal{K}_1)}(x - a_{I_1}) & , \text{ si } x \in \mathcal{K}_1 \\ \frac{l_I}{2mes(\mathcal{K}_2)}(a_{I_2} - x) & , \text{ si } x \in \mathcal{K}_2 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Le support d'une fonction de base liée à la triangulation est l'union de deux triangles. On remarque que la restriction d'une fonction de base (liée à la triangulation) à un de ces deux triangles ne coïncide pas avec la définition locale à ce triangle de la fonction de base (associée au même noeud) mais avec son opposé.

Remarque :

Si  $n = 1$ , l'élément de Raviart-Thomas est en fait l'élément fini  $\mathbb{P}_1$ .

Donc les fonctions de base du segment  $[a_1, a_2]$  sont :

$$\varphi_1(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

## 2.4 Discrétisation

On se donne une triangulation admissible  $\mathcal{T}$  du domaine  $\Omega$ . On introduit les espaces d'approximation

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \{v \in H(\text{div}, \Omega), v|_{\mathcal{K}} \in P, \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}\} \\ \mathcal{M}_h &= \{w \in L^2(\Omega), w|_{\mathcal{K}} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{K}), \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}\}. \end{aligned}$$

On considère alors le problème approché  $(P_h)$  :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ et } p_h \in \mathcal{M}_h \text{ tels que} \\ \alpha(u_h, v_h) + \beta(v_h, p_h) = L_d(v_h) \quad , \forall v_h \in \mathcal{V}_h \\ \beta(u_h, r_h) = L_q(r_h) \quad , \forall r_h \in \mathcal{M}_h \end{cases}$$

Les fonctions de base de Raviart-Thomas  $(\varphi_I)_{I=1..Nb \text{ de noeuds}}$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}_h$  et les fonctions  $(\Pi_L)_{L=1..Nb \text{ d'éléments}}$ , fonctions de base  $\mathbb{P}_0$ , constituent une base de  $\mathcal{M}_h$ .

Le problème approché  $(P_h)$  se réécrit donc sous la forme du système linéaire suivant :

$$(P'_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (u_J) \in \mathbb{R}^{Nb \text{ de noeuds}} \text{ et } (p_J) \in \mathbb{R}^{Nb \text{ d'éléments}} \text{ tels que} \\ \sum_{J=1}^{nbneu} \alpha(\varphi_J, \varphi_I) u_J + \sum_{J=1}^{nbte} \beta(\varphi_I, \Pi_J) p_J = L_d(\varphi_I) \quad , \forall I \in \{1, \dots, Nb \text{ de noeuds}\} \\ \sum_{J=1}^{nbneu} \beta(\varphi_J, \Pi_L) u_J = L_q(\Pi_L) \quad , \forall L \in \{1, \dots, Nb \text{ d'éléments}\} \end{cases}$$

On se ramène donc à :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ Q \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} A_{IJ} &= \alpha(\varphi_J, \varphi_I) \quad , \forall I, J \in \{1, \dots, Nb \text{ de noeuds}\} \\ B_{LI} &= \beta(\varphi_I, \Pi_L) \quad , \forall I \in \{1, \dots, Nb \text{ de noeuds}\}, \forall L \in \{1, \dots, Nb \text{ d'éléments}\} \\ U_I &= u(n_I) \quad , \forall I \in \{1, \dots, Nb \text{ de noeuds}\} \\ P_L &= p(L) \quad , \forall L \in \{1, \dots, Nb \text{ d'éléments}\} \\ D_I &= L_d(\varphi_I) \quad , \forall I \in \{1, \dots, Nb \text{ de noeuds}\} \\ Q_L &= L_q(\Pi_L) \quad , \forall L \in \{1, \dots, Nb \text{ d'éléments}\} \end{aligned}$$

Les coefficients sont calculés par une formule de quadrature (ici exacte car les  $\varphi_I$  sont affines sur  $\mathcal{K}$ ). On obtient :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi_I, \varphi_J) &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \int_{\mathcal{K}} K^{-1} \varphi_I \varphi_J \, dx \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \frac{mes(\mathcal{K})}{3} \sum_{k=1}^3 K^{-1}(m_k) \varphi_I(m_k) \varphi_J(m_k) \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \frac{l_I l_J}{2mes(\mathcal{K})} \sum_{k=1}^3 K^{-1}(m_k) \overrightarrow{a_I m_k} \overrightarrow{a_J m_k} \\ \beta(\varphi_J, \Pi_{\mathcal{K}_I}) &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \int_{\mathcal{K}} \text{div } \varphi_J \Pi_{\mathcal{K}_I} \, dx \\ &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_I} \int_{\mathcal{K}} \text{div } \varphi_J \, dx \\ &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_I} l_J \\ L_q(\Pi_{\mathcal{K}_I}) &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \int_{\mathcal{K}} q \Pi_{\mathcal{K}_I} \, dx \\ &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_I} \int_{\mathcal{K}_I} q \, dx \\ &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}_I} \frac{mes(\mathcal{K}_I)}{3} \sum_{k=1}^3 q(m_k) \\ L_d(\varphi_I) &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \int_{\Gamma_D} p_D \varphi_I \cdot n \, dx \\ &= - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \frac{l_I}{2} \sum_{k=1}^2 p_D(a_I) \end{aligned}$$



## 2.5 Premiers résultats. Influence de la largeur de la fissure

Afin d'illustrer la pertinence de la méthode quand la largeur de la fissure diminue, on refait le test proposé au paragraphe 1.3. Les conditions aux bords sont données par la figure 2.

On a vu que la solution  $p$  du problème (2) est affine par morceaux. La pression est parfaitement connue et unique.

Le saut de pression vaut :

$$-\alpha_f d = \frac{d}{K_{fn}(b+c) + d}$$

On remarque que le saut de pression dépend bien de  $K_{fn}$  :

- lorsque  $K_{fn} \rightarrow 0$ , le saut  $\rightarrow 1$
- lorsque  $K_{fn} \rightarrow \infty$ , le saut  $\rightarrow 0$
- lorsque  $K_{fn} = 1$ , la pression se comporte comme si la fissure n'existait pas, elle est linéaire.

Maintenant on fixe  $K_{fn} = 10^{-3}$  (cas imperméable) et on fait varier la largeur  $d$  de la fissure entre  $10^{-1}$  et  $10^{-4}$ . On s'intéresse aux valeurs de la pression à  $y$  fixé (on fait une coupe de la solution).

Sur la figure 7 où la taille de la fissure est de  $10^{-1}$ , on peut visualiser que la solution théorique et celle obtenue à partir du modèle complet se confondent quel que soit le raffinement, de même pour la figure 8 où la taille de la fissure est de  $10^{-2}$ .

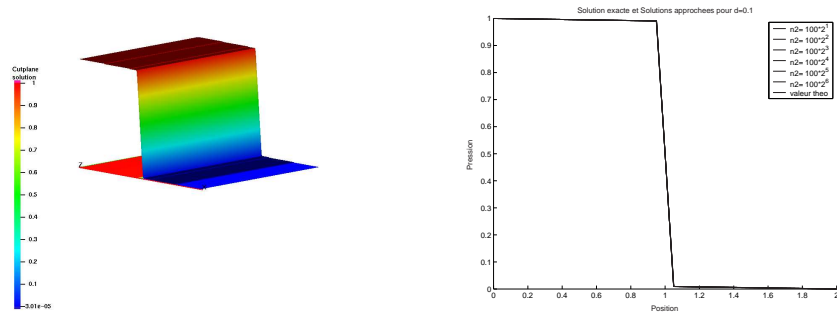


FIG. 7 -  $d = 10^{-1}$ , solution approchée(gauche), coupe solution exacte et approchée(droite)

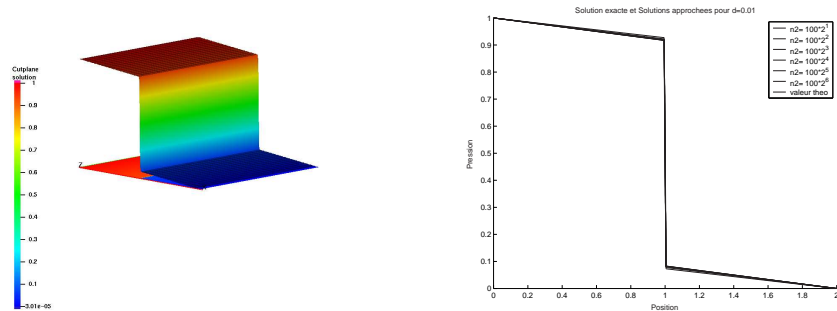


FIG. 8 -  $d = 10^{-2}$ , solution approchée(gauche), coupe solution exacte et approchée(droite)

Par contre, lorsque la fissure est plus fine. On observe, sur les figure 9 et 10, que la pente de la solution calculée varie en fonction du pas du maillage. Il y a convergence en maillage vers la solution du problème. Mais le pas du maillage doit être petit devant la taille de la fissure. Les raffinements du maillage augmente considérablement la taille du système linéaire et le temps de résolution devient très grand. Il convient donc d'utiliser un modèle mieux adapté aux fissures de petite taille.

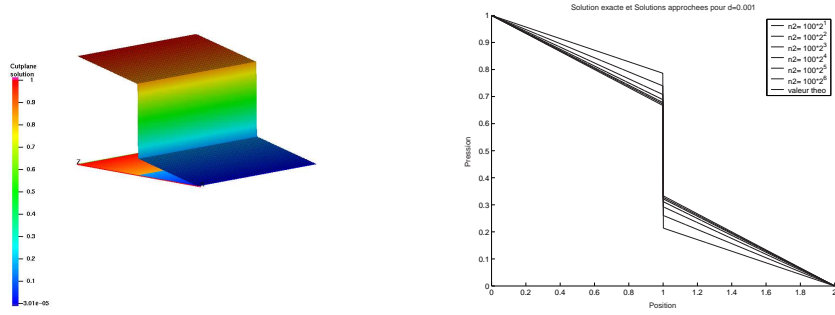


FIG. 9 –  $d = 10^{-3}$ , solution approchée(gauche), coupe solution exacte et approchée(droite)

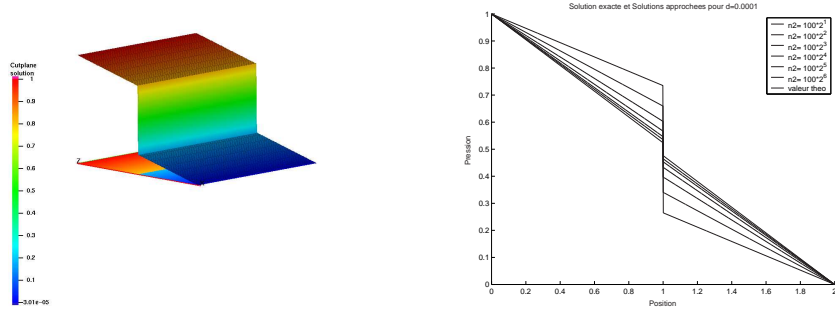


FIG. 10 –  $d = 10^{-4}$ , solution approchée(gauche), coupe solution exacte et approchée(droite)

### 3 Modèle asymptotique

Cette section présente un modèle ([1], [2]) adapté aux fissures de petite taille.

#### 3.1 Principe du modèle

La fissure est considérée comme une interface à une 1 dimension.

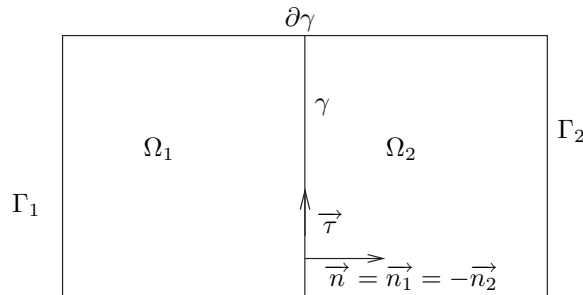


FIG. 11 – Domaine  $\Omega$

On vient de voir que lorsque la taille de la fissure est très petite, l'approximation de la solution est très coûteuse. Pour remédier à ce problème, on va remplacer la fissure bidimensionnelle par une fissure monodimensionnelle, voir figure 11. On ne cherche plus à connaître les valeurs des inconnues à l'intérieur de la fissure mais on cherche à approcher au mieux l'effet de la fissure sur les valeurs des inconnues à l'extérieur. Pour cela, on introduit de nouvelles inconnues sur la fissure qui correspondent à la moyenne selon la direction normale à la fissure, des inconnues précédentes dans la fissure. On cherche alors les équations vérifiées par ces nouvelles inconnues.

#### 3.2 Loi de conservation

La loi de conservation dans  $\Omega_f$  est :

$$\operatorname{div} u_f = q_f \quad \text{dans } \Omega_f$$

On rappelle que la forme choisie de  $K$ , le tenseur de perméabilité, nous oblige à travailler dans la base des vecteurs, tangentiel et normal.

On décompose  $u_f$  dans cette base :  $u_f = u_{f\tau} \vec{\tau} + u_{fn} \vec{n}$ .

On exprime le gradient et la divergence dans cette base :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} p &= \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \vec{\tau}} \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \end{pmatrix} \\ \text{div } u_f &= \frac{\partial u_{f\tau}}{\partial \vec{\tau}} + \frac{\partial u_{fn}}{\partial \vec{n}} \end{aligned}$$

L'équation  $\text{div } u_f = q_f$  devient  $\frac{\partial u_{f\tau}}{\partial \vec{\tau}} + \frac{\partial u_{fn}}{\partial \vec{n}} = q_f$  dans  $\Omega_f$ .

On intègre dans la direction normale sur la fissure, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial u_{fn}}{\partial \vec{n}} dn + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{\partial u_{f\tau}}{\partial \vec{\tau}} dn &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} q_f dn \\ u_{fn}|_{\gamma_2} - u_{fn}|_{\gamma_1} + \frac{\partial \overline{u.\tau}|_{\gamma}}{\partial \vec{\tau}} &= Q_f \end{aligned}$$

où  $\overline{u.\tau}|_{\gamma} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} u_{f\tau} dn$  est la moyenne de la pression tangentielle sur la fissure et  $Q_f = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} q_f dn$ .

Grâce à la continuité du flux, on obtient donc :

$$\frac{\partial \overline{u.\tau}|_{\gamma}}{\partial \vec{\tau}} = Q_f + (u_1.n_1|_{\gamma_1} + u_2.n_2|_{\gamma_2}) \quad \text{sur } \gamma \quad (4)$$

### 3.3 Loi de Darcy

La loi de Darcy s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{f\tau} &= -K_{f\tau} \vec{\text{grad}}_{\tau} p_f && \text{dans } \Omega_f \\ u_{fn} &= -K_{fn} \vec{\text{grad}}_n p_f && \text{dans } \Omega_f \end{aligned}$$

On intègre de même dans la direction normale à la fissure.

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} u_{f\tau} dn = - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} K_{f\tau} \vec{\text{grad}}_{\tau} p_f dn$$

$$\overline{u.\tau}|_{\gamma} = -K_{f\tau} d \vec{\text{grad}}_{\tau} P_f \quad (5)$$

où  $P_f = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} p_{f\tau} dn$ .

On fait de même sur la seconde équation.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} u_{fn}.n dn &= - \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} K_{fn} \vec{\text{grad}}_n p_f dn \\ \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} u_{fn}.n dn &= -K_{fn}(p_f|_{\gamma_2} - p_f|_{\gamma_1}) && \text{dans } \Omega_f \end{aligned} \quad (6)$$

### 3.4 Conditions de raccord au niveau de la fissure

Suivant l'approximation de  $P_f = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} p_{f\tau} dn$  et de  $\overline{u.n}|_{\gamma} = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} u_{fn}.n dn$ , on obtient différentes conditions. Nous allons donner l'exemple de trois conditions que l'on réécrira par la suite sous forme d'une seule équation avec un paramètre  $\xi$ .

– **Première approximation :**

On utilise la quadrature des trapèzes pour approcher les deux quantités.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} u_{fn}.n \, dn &\simeq \frac{d}{2}(u_f.n|_{\gamma_2} + u_f.n|_{\gamma_1}) \\ &= \frac{d}{2}(u_2.n|_{\gamma_2} + u_1.n|_{\gamma_1}) \\ P_f &\simeq \frac{p_2|_{\gamma_2} + p_1|_{\gamma_1}}{2} \end{aligned}$$

L'équation (6) devient :

$$\frac{1}{2}(u_2.n|_{\gamma_2} + u_1.n|_{\gamma_1}) = -K_{fn} \frac{p_2|_{\gamma_2} - p_1|_{\gamma_1}}{d}$$

On pose  $\alpha_f = \frac{2K_{fn}}{d}$ , l'équation devient alors :

$$-u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f p_1|_{\gamma_1} = -u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f p_2|_{\gamma_2}$$

En remplaçant  $p_2$  (respectivement  $p_1$ ) par sa valeur en fonction de  $P_f$  et  $p_1$  (respectivement  $p_2$ ), les deux équations finales sont :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f p_1|_{\gamma_1} &= -\frac{1}{2}u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f P_f \\ -\frac{1}{2}u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f p_2|_{\gamma_2} &= -\frac{1}{2}u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f P_f \end{aligned}$$

– **Deuxième approximation :**

On sépare l'intégrale sur la fissure en deux intégrales l'une sur  $[-\frac{d}{2}; 0]$  et l'autre sur  $[0; \frac{d}{2}]$ . On approche  $P_f$  par  $p_f(0)$  et on utilise la formule de quadrature des trapèzes sur les membres de gauche des deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^0 u_{fn}.n \, dn &= -\int_{-\frac{d}{2}}^0 K_{fn} \overrightarrow{\text{grad}}_n p_f \, dn \\ \int_0^{\frac{d}{2}} u_{fn}.n \, dn &= -\int_0^{\frac{d}{2}} K_{fn} \overrightarrow{\text{grad}}_n p_f \, dn \end{aligned}$$

On considère tout d'abord la première équation sur  $[-\frac{d}{2}; 0]$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{d}{2}} K_{fn} \overrightarrow{\text{grad}}_n p_f \, dn &= K_{fn}(P_f - p_f|_{\gamma_1}) \\ \int_{-\frac{d}{2}}^0 u_{fn}.n \, dn &= -K_{fn}(P_f - p_f|_{\gamma_1}) \end{aligned}$$

On approche  $\int_{-\frac{d}{2}}^0 u_{fn}.n \, dn$  par la méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^0 u_{fn}.n \, dn &\approx \frac{d}{2} \frac{1}{2} \left( \frac{u_f.n|_{\gamma_1} + u_f.n|_{\gamma_2}}{2} + u_f.n|_{\gamma_1} \right) \\ &= \frac{d}{4} (3u_1.n|_{\gamma_1} + u_2.n|_{\gamma_2}) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{1}{4}(3u_1.n|_{\gamma_1} + u_2.n|_{\gamma_2}) = -K_{fn} \frac{P_f - p_1|_{\gamma_1}}{\frac{d}{2}}$$

En utilisant le coefficient  $\alpha_f = \frac{2K_{fn}}{d}$ , on a alors :

$$-\frac{3}{4}u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f p_1|_{\gamma_1} = -\frac{1}{4}u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f P_f$$

On obtient de même pour la seconde équation sur  $[0; \frac{d}{2}]$  :

$$-\frac{3}{4}u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f p_2|_{\gamma_2} = -\frac{1}{4}u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f P_f$$

On veut exprimer  $u_1.n_1$  et  $u_2.n_2$  en fonction de  $P_f, p_1|_{\gamma_1}, p_2|_{\gamma_2}$ , pour cela on multiplie la première équation par  $-3$  et on lui soustrait la seconde. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{9}{4}u_1.n_1|_{\gamma_1} - 3\alpha_f p_1|_{\gamma_1} &= \frac{3}{4}u_2.n_2|_{\gamma_2} - 3\alpha_f P_f \\ 2u_1.n_1|_{\gamma_1} - 3\alpha_f p_1|_{\gamma_1} &= \alpha_f p_2|_{\gamma_2} - 4\alpha_f P_f \\ u_1.n_1|_{\gamma_1} &= \frac{K_{fn}}{d} (3p_1|_{\gamma_1} + p_2|_{\gamma_2} - 4P_f) \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$u_2.n_2|_{\gamma_2} = \frac{K_{fn}}{d} (3p_2|_{\gamma_2} + p_1|_{\gamma_1} - 4P_f)$$

– **Troisième approximation :**

On utilise la formule de quadrature des trapèzes sur  $P_f$  et sur les deux intégrales  $\int_{-\frac{d}{2}}^0 u_{fn}.n \, dn$  et

$$\int_0^{\frac{d}{2}} u_{fn}.n \, dn :$$

$$\begin{aligned} u_1.n_1|_{\gamma_1} &= K_{fn} \frac{p_1|_{\gamma_1} - 2P_f}{\frac{d}{2}} \\ u_2.n_2|_{\gamma_2} &= K_{fn} \frac{p_2|_{\gamma_2} - 2P_f}{\frac{d}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant le coefficient  $\alpha_f$ , on a alors :

$$\begin{aligned} -u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f p_1|_{\gamma_1} &= \alpha_f P_f \\ -u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f p_2|_{\gamma_2} &= \alpha_f P_f \end{aligned}$$

Les trois approximations conduisent aux conditions de raccord sur la fissure suivantes :

$$\begin{aligned} -\xi u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f p_1|_{\gamma_1} &= -(1-\xi)u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f P_f \\ -\xi u_2.n_2|_{\gamma_2} + \alpha_f p_2|_{\gamma_2} &= -(1-\xi)u_1.n_1|_{\gamma_1} + \alpha_f P_f \end{aligned}$$

où  $\xi$  vaut respectivement  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ .

Pour alléger les notations, on note la moyenne de la pression sur la fissure  $p_f$  au lieu de  $P_f$ , de même  $q_f$  au lieu de  $Q_f$ , et  $u_{f\tau}$  au lieu de  $\bar{u}.\bar{\tau}|_{\gamma}$

$$\begin{aligned}
u_i &= -K_i \overrightarrow{\text{grad}} p_i && \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \\
\text{div } u_i &= q_i && \text{dans } \Omega_i, \quad i = 1, 2 \\
u_{f\tau} &= -K_{f\tau} d \overrightarrow{\text{grad}}_\tau p_f && \text{dans } \gamma \\
\text{div}_\tau u_{f\tau} &= q_f + (u_1 \cdot n_1|_\gamma + u_2 \cdot n_2|_\gamma) && \text{dans } \gamma \\
-\xi u_i \cdot n_i + \alpha_f p_i &= \alpha_f p_f - (1 - \xi) u_{i+1} \cdot n_{i+1} && \text{dans } \gamma, \quad i = 1, 2 \\
p_i &= p_{D_i} && \text{sur } \Gamma_i, \quad i = 1, 2 \\
p_f &= p_{D_f} && \text{sur } \partial\gamma_i,
\end{aligned} \tag{7}$$

## 4 Approximation du modèle asymptotique

### 4.1 Résolution par éléments finis

Cette section présente la résolution des équations liées au modèle asymptotique par une méthode d'éléments finis mixtes ([1]).

#### 4.1.1 Formulation variationnelle mixte

On introduit les espaces de fonctions :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \{r = (r_1, r_2, r_f) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times L^2(\gamma)\} \\
\mathcal{W} &= \{v = (v_1, v_2, v_f) \in H(\text{div}, \Omega_1) \times H(\text{div}, \Omega_2) \times H(\text{div}_\tau \gamma) : v_i \cdot n_i \in L^2(\gamma), \quad i = 1, 2\}
\end{aligned}$$

#### Théorème 4.1

La formulation variationnelle du problème (7) est :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } u \in \mathcal{W} \quad \text{et} \quad p \in \mathcal{M} \text{ tels que} \\
\alpha_\xi(u, v) + \beta(v, p) &= L_d(v), \quad \forall v \in \mathcal{W}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\beta(u, r) = L_q(r), \quad \forall r \in \mathcal{M} \tag{9}$$

avec

$$\alpha_\xi(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} K_i^{-1} u_i v_i \, dx + \int_\gamma (K_{f\tau} d)^{-1} u_f v_f \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_\gamma \frac{1}{\alpha_f} (\xi u_i \cdot n_i - (1 - \xi) u_{i+1} \cdot n_{i+1}) v_i \cdot n_i \, dx$$

$$\beta(u, r) = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \text{div } u_i r_i \, dx - \int_\gamma \text{div}_\tau u_f r_f \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_\gamma u_i \cdot n_i r_f \, dx$$

$$L_d(v) = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} v_i \cdot n_i p_{D_i} \, dx - \int_{\partial\gamma} v_f \cdot n_f p_{D_f} \, dx$$

$$L_q(r) = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} q_i r_i \, dx - \int_\gamma q_f r_f \, dx$$

#### **Démonstration :**

On a les équations reliant  $\vec{u}$  et  $p$  du problème (7) :

$$\begin{aligned}
-K_i^{-1} u_i &= \overrightarrow{\text{grad}} p_i \quad i = 1, 2 \\
-(K_{f\tau} d)^{-1} u_f &= \overrightarrow{\text{grad}}_\tau p_f
\end{aligned}$$

On intègre ces trois équations et en les multipliant par les fonctions tests de l'espace  $\mathcal{W}$  :

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega_i} K_i^{-1} u_i v_i \, dx &= \int_{\Omega_i} \overrightarrow{\text{grad}} p_i v_i \, dx \quad i = 1, 2 \\
- \int_\gamma (K_{f\tau} d)^{-1} u_f v_f \, dx &= \int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}_\tau p_f v_f \, dx
\end{aligned}$$

On utilise la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \operatorname{div} v_i p_i \, dx - \int_{\partial\Omega_i} p_i v_i \cdot n_i \, dx &= - \int_{\Omega_i} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p_i v_i \, dx \\ \int_{\gamma} \operatorname{div} v_f p_f \, dx - \int_{\partial\gamma} p_f v_f \cdot n_f \, dx &= - \int_{\gamma} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p_f v_f \, dx \end{aligned}$$

La frontière de  $\Omega_i$  est partagée en deux parties :  $\partial\Omega_i = \Gamma_i + \gamma$ . En sommant les trois équations et en utilisant les conditions aux bords  $p = p_D$  sur  $\Gamma_D$  et  $v_i \cdot n_i = 0$  sur  $\Gamma_N$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} K_i^{-1} u_i v_i \, dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div} v_i p_i \, dx + \int_{\gamma} (K_{f\tau} d)^{-1} u_f v_f \, dx - \int_{\gamma} \operatorname{div}_{\tau} v_f p_f \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} p_i v_i \cdot n_i \, dx \\ = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} v_i \cdot n_i p_{D_i} \, dx - \int_{\partial\gamma} v_f \cdot n_f p_{D_f} \, dx \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} p_i v_i \cdot n_i \, dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} \frac{1}{\alpha_f} (\xi u_i \cdot n_i - (1 - \xi) u_{i+1} \cdot n_{i+1}) v_i \cdot n_i \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} v_i \cdot n_i p_f \, dx$$

On arrive alors à l'équation (8).

On a les équations reliant  $\vec{u}$  et  $q$  du problème (7) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u_i &= q_i & i = 1, 2 \\ \operatorname{div} u_f &= q_f + \sum_{i=1}^2 u_i \cdot n_i \end{aligned}$$

On intègre les trois équations et on les multiplie par les fonctions tests de l'espace  $\mathcal{M}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \operatorname{div} u_i r_i \, dx &= \int_{\Omega_i} q_i r_i \, dx & i = 1, 2 \\ \int_{\gamma} \operatorname{div} u_f r_f \, dx &= \int_{\gamma} q_f r_f \, dx + \int_{\gamma} \sum_{i=1}^2 u_i \cdot n_i r_f \, dx \end{aligned}$$

En sommant les trois équations, on obtient :

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div} u_i r_i \, dx - \int_{\gamma} \operatorname{div}_{\tau} u_f r_f \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} u_i \cdot n_i r_f \, dx = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} q_i r_i \, dx - \int_{\gamma} q_f r_f \, dx$$

On arrive à l'équation (9).

Et réciproquement, si  $\forall v, u \in \mathcal{W}^2$  et  $\forall r \in \mathcal{M}$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi}(u, v) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} K_i^{-1} u_i v_i \, dx + \int_{\gamma} (K_{f\tau} d)^{-1} u_f v_f \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} \frac{1}{\alpha_f} (\xi u_i \cdot n_i - (1 - \xi) u_{i+1} \cdot n_{i+1}) v_i \cdot n_i \, dx \\ \beta(u, r) &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div} u_i r_i \, dx - \int_{\gamma} \operatorname{div}_{\tau} u_f r_f \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} u_i \cdot n_i r_f \, dx \end{aligned}$$

alors

$$\alpha_{\xi}(u, v) + \beta(v, p) = L_d(v)$$

En utilisant la formule de Green :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \left( K_i^{-1} u_i + \overrightarrow{\operatorname{grad}} p_i \right) v_i \, dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} p_i v_i \cdot n_i \, dx + \int_{\gamma} \left( (K_{f\tau} d)^{-1} u_f + \overrightarrow{\operatorname{grad}}_{\tau} p_f \right) v_f \, dx - \int_{\partial\gamma} v_f \cdot n_f p_f \, dx \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} \left( \frac{\xi}{\alpha_f} u_i \cdot n_i - \frac{(1 - \xi)}{\alpha_f} u_{i+1} \cdot n_{i+1} - p_i + p_f \right) v_i \cdot n_i \, dx = - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} v_i \cdot n_i p_{D_i} \, dx - \int_{\partial\gamma} v_f \cdot n_f p_{D_f} \, dx \end{aligned}$$

Si on prend  $v \in \mathbb{C}_c^\infty$  à support compact dans  $[0, a] \times [0, b]$  ou dans  $[0, a] \times [b + d, b + d + c]$ , alors on obtient

$$K_i^{-1} u_i = -\overrightarrow{\text{grad}} p_i$$

De même si on prend  $v \in \mathbb{C}_c^\infty$  à support compact dans  $[0, a] \times [b, b + d]$ , alors on obtient

$$(K_{f\tau d})^{-1} u_f = -\overrightarrow{\text{grad}}_\tau p_f$$

De même on en déduit le problème (7). □

#### 4.1.2 Existence et unicité de la solution

Le problème étudié est :

$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in \mathcal{W} & \text{ et } p \in \mathcal{M} & \text{ tels que} \\ \alpha_\xi(u, v) + \beta(v, p) & = L_d(v) & , \forall v \in \mathcal{W} \\ \beta(u, r) & = L_q(r) & , \forall r \in \mathcal{M} \end{aligned} \quad (10)$
--

#### Proposition 4.2

*On suppose qu'il existe  $0 < K_{min} < K_{max}$  tels que  $K_{min} \leq K_i \leq K_{max}$ , pour  $i = 1, 2$ ,  $K_{min} \leq K_{f\tau d} \leq K_{max}$  et  $K_{min} \leq \frac{K_{fn}}{d} \leq K_{max}$ . Si  $\xi > \frac{1}{2}$ , alors le problème (10) admet une solution unique.*

#### Démonstration :

On utilise le théorème 2.1.

L'espace  $\mathcal{W}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathcal{W}}^2 = \sum_{i=1}^2 (\|u_i\|_{0, \Omega_i}^2 + \|\text{div } v_i\|_{0, \Omega_i}^2) + \|u_f\|_{0, \gamma}^2 + \|\text{div}_\tau u_f\|_{0, \gamma}^2 + \sum_{i=1}^2 \|u_i \cdot n_i\|_{0, \gamma}^2$$

L'application  $\alpha_\xi$

$$\begin{aligned} |\alpha_\xi(u, v)| &= \left| \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} K_i^{-1} u_i v_i \, dx + \int_\gamma (K_{f\tau d})^{-1} u_f v_f \, dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \int_\gamma \frac{1}{\alpha_f} (\xi u_i \cdot n_i - (1 - \xi) u_{i+1} \cdot n_{i+1}) v_i \cdot n_i \, dx \right| \\ &\leq K_{min}^{-1} \left( \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{0, \Omega_i} \|v_i\|_{0, \Omega_i} + \|u_f\|_{0, \gamma} \|v_f\|_{0, \gamma} \right) \\ &\quad + \frac{K_{min}^{-1}}{2} \sum_{i=1}^2 (\|u_i \cdot n_i\|_{0, \gamma} \|v_i \cdot n_i\|_{0, \gamma} + \|u_{i+1} \cdot n_{i+1}\|_{0, \gamma} \|v_i \cdot n_i\|_{0, \gamma}) \\ &\leq 5K_{min}^{-1} \|u\|_{\mathcal{W}} \|v\|_{\mathcal{W}} \end{aligned}$$

$\alpha_\xi$  est une forme bilinéaire continue.

Pour démontrer la coercivité de  $\alpha_\xi$ , on prend  $u \in \widetilde{\mathcal{W}} = \{u \in \mathcal{W}, \beta(u, r) = 0, \forall r \in M\}$ . Si  $u \in \widetilde{\mathcal{W}}$ , alors on a  $\|\text{div } u_i\|_{0, \Omega_i} = 0$  et  $\text{div}_\tau u_f = u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2$ , par conséquent

$$\|u\|_{\mathcal{W}}^2 = \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{0, \Omega_i}^2 + \|u_f\|_{0, \gamma}^2 + \left\| \sum_{i=1}^2 u_i \cdot n_i \right\|_{0, \gamma}^2 + \sum_{i=1}^2 \|u_i \cdot n_i\|_{0, \gamma}^2.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \alpha_\xi(v, v) &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} K_i^{-1} v_i^2 \, dx + \int_\gamma (K_{f\tau d})^{-1} v_f^2 \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_\gamma \frac{1}{\alpha_f} (\xi v_i \cdot n_i - (1 - \xi) v_{i+1} \cdot n_{i+1}) v_i \cdot n_i \, dx \\ &\geq K_{max}^{-1} \left( \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{0, \Omega_i}^2 + \|v_f\|_{0, \gamma}^2 \right) + \xi \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{v_i \cdot n_i}{\sqrt{\alpha_f}} \right\|_{0, \gamma}^2 - 2(1 - \xi) \int_\gamma \frac{v_1 \cdot n_1}{\sqrt{\alpha_f}} \frac{v_2 \cdot n_2}{\sqrt{\alpha_f}} \end{aligned}$$



**Lemme 4.3**

On a

$$\xi \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{v_i \cdot n_i}{\sqrt{\alpha_f}} \right\|_{0,\gamma}^2 - 2(1-\xi) \int_{\gamma} \frac{v_1 \cdot n_1}{\sqrt{\alpha_f}} \frac{v_2 \cdot n_2}{\sqrt{\alpha_f}} \geq (2\xi - 1) \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{v_i \cdot n_i}{\sqrt{\alpha_f}} \right\|_{0,\gamma}^2.$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \int (f - g)^2 dx &\geq 0 \\ -2 \int fg dx &\geq -\int f^2 - \int g^2 dx \\ -2(1-\xi) \int fg dx &\geq -(1-\xi) \int (f^2 + g^2) dx \\ \xi \int (f^2 + g^2) dx - 2(1-\xi) \int fg dx &\geq (2\xi - 1) \int (f^2 + g^2) dx \end{aligned}$$

□

Retour à la démonstration de la proposition 4.2.

D'où avec  $\frac{K_{fn}}{d} = \frac{\alpha_f}{2} \leq K_{max}$  on a  $\frac{1}{\alpha_f} \leq \frac{1}{2K_{max}} \leq K_{max}^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi}(v, v) &\geq K_{max}^{-1} \left( \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|v_f\|_{0,\gamma}^2 \right) + \min(1, 2\xi - 1) \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{v_i \cdot n_i}{\sqrt{\alpha_f}} \right\|_{0,\gamma}^2 \\ &\geq K_{max}^{-1} \left( \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|v_f\|_{0,\gamma}^2 + \min(1, 2\xi - 1) \sum_{i=1}^2 \|v_i \cdot n_i\|_{0,\gamma}^2 \right) \end{aligned}$$

Or  $\left\| \sum_{i=1}^2 v_i \cdot n_i \right\|_{0,\gamma}^2 \leq 2 \sum_{i=1}^2 \|v_i \cdot n_i\|_{0,\gamma}^2$ , on obtient alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} 3 \left( \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|v_f\|_{0,\gamma}^2 + \sum_{i=1}^2 \|v_i \cdot n_i\|_{0,\gamma}^2 \right) &\geq \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|v_f\|_{0,\gamma}^2 + \sum_{i=1}^2 \|v_i \cdot n_i\|_{0,\gamma}^2 + \underbrace{2 \sum_{i=1}^2 \|v_i \cdot n_i\|_{0,\gamma}^2}_{\geq \left\| \sum_{i=1}^2 v_i \cdot n_i \right\|_{0,\gamma}^2} \\ &\geq \|v\|_{\mathcal{W}}^2 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\alpha_{\xi}(v, v) \geq \frac{K_{max}^{-1}}{3} \min(1, 2\xi - 1) \|v\|_{\mathcal{W}}^2$$

Donc  $\alpha_{\xi}$  est coercive sur  $\mathcal{W}$ .L'espace  $\mathcal{M}$  est muni de la norme :

$$\|r\|_{\mathcal{M}}^2 = \sum_{i=1}^2 \|r_i\|_{0,\Omega_i}^2 + \|r_f\|_{0,\gamma}^2$$

L'application  $\beta$ 

$$\begin{aligned} |\beta(u, r)| &= \left| -\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \operatorname{div} u_i r_i dx - \int_{\gamma} \operatorname{div}_{\tau} u_f r_f dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma} u_i \cdot n_i r_f dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \|\operatorname{div} u_i\|_{0,\Omega_i} \|r_i\|_{0,\Omega_i} + \|\operatorname{div}_{\tau} u_f\|_{0,\gamma} \|r_f\|_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^2 \|u_i \cdot n_i\|_{0,\gamma} \|r_f\|_{0,\gamma} \\ \beta(u, r) &\leq 3 \|u\|_{\mathcal{W}} \|r\|_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

$\beta$  est une forme bilinéaire continue.

Pour montrer que  $\beta$  vérifie la condition inf-sup, on va utiliser le lemme suivant.

**Lemme 4.4**

Pour tout  $r$  dans  $\mathcal{M}$ , il existe  $v$  dans  $\mathcal{W}$  tel que :  $\beta(v, r) = \|r\|_{\mathcal{M}}^2$  et  $\|v\|_{\mathcal{W}} \leq C\|r\|_{\mathcal{M}}$

**Démonstration :**

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.3.

Soit  $r = (r_1, r_2, r_f) \in \mathcal{M}$ .

Soit  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_f) \in H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2) \times H^2(\gamma)$  telles que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = r_i & \text{dans } \Omega_i \\ -\Delta_\tau\varphi_f = r_f & \text{dans } \gamma \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \overrightarrow{\text{grad}}\varphi.n = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Comme on veut  $\beta(v, r) = \|r\|_{\mathcal{M}}^2$ , cela revient en fait à prendre  $-\text{div } v_i = r_i$  et  $\text{div}_\tau v_f = r_f$ , alors

$$\int_{\Omega_i} r_i = - \int_{\Omega_i} \text{div } v_i$$

D'après la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} r_i &= - \int_{\Gamma_i} v_i.n \\ \text{Or } \int_{\Omega_i} r_i &= - \int_{\Omega_i} \Delta\varphi_i \\ &= - \int_{\Gamma_i} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i.n \end{aligned}$$

D'où :  $v_i = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i$  de même  $v_f = \overrightarrow{\text{grad}}_\tau \varphi_f$ .

On a bien  $v = (v_1, v_2, v_f) \in \mathcal{W}$  avec  $v_1.n_1 = -v_2.n_2$  et  $\beta(v, r) = \|r\|_{\mathcal{M}}^2$ .

De plus,

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{W}}^2 &= \|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\overrightarrow{\text{grad}}_\tau \varphi_f\|_{0,\gamma}^2 + \|r\|_{\mathcal{M}}^2 + 2\|v_1.n_1\|_{0,\gamma}^2 \\ &\leq C(\Omega, \gamma)\|r\|_{\mathcal{M}}^2 \end{aligned}$$

□

Retour à la démonstration de la proposition 4.2. Soit  $r \in \mathcal{M}$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{W}} \frac{\beta(f, r)}{\|f\|_{\mathcal{W}} \|r\|_{\mathcal{M}}} &\geq \frac{\beta(v, r)}{\|v\|_{\mathcal{W}} \|r\|_{\mathcal{M}}} \\ &\geq \frac{\|r\|_{\mathcal{M}}}{\|v\|_{\mathcal{W}}} \\ &\geq C \end{aligned}$$

$$\inf_{r \in \mathcal{M}} \sup_{v \in \mathcal{W}} \frac{\beta(v, r)}{\|v\|_{\mathcal{W}} \|r\|_{\mathcal{M}}} \geq C$$

On a donc démontré que  $\alpha_\xi$  est une forme bilinéaire, continue sur  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  et coercive sur  $\widetilde{\mathcal{W}}$  et que  $\beta$  est une forme bilinéaire, continue  $\mathcal{W} \times \mathcal{M}$  vérifiant la condition inf-sup, on en déduit l'existence et unicité de la solution.

□

### 4.1.3 Discrétisation

On se donne des triangulations admissibles  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_f$  des domaines  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\gamma$ . Pour chaque triangulation, on introduit les 2 espaces d'approximation classiques (voir section 2.4) :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{hi} &= \{v \in H(\operatorname{div}, \Omega_i), v|_{\mathcal{K}} \in \mathbb{P}_0^2 \oplus \mathbb{P}_0 \vec{X}, \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_i\} & i = 1, 2 \\ \mathcal{M}_{hi} &= \{w \in L^2(\Omega_i), w_{\mathcal{K}} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{K}), \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_i\} & i = 1, 2 \\ \mathcal{V}_{hf} &= \{v \in H(\operatorname{div}, \gamma), v|_{\mathcal{K}} \in \mathbb{P}_1, \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_f\} \\ \mathcal{M}_{hf} &= \{w \in L^2(\gamma), w_{\mathcal{K}} \in \mathbb{P}_0(\mathcal{K}), \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}_f\}\end{aligned}$$

On note  $\mathcal{W}_h$  et  $\mathcal{M}_h$  le produit de ces espaces.

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_h &= \mathcal{V}_{h1} \times \mathcal{V}_{h2} \times \mathcal{V}_{hf} \\ \mathcal{M}_h &= \mathcal{M}_{h1} \times \mathcal{M}_{h2} \times \mathcal{M}_{hf}\end{aligned}$$

Nous avons donné des bases des espaces  $\mathcal{V}_{hi}$  et  $\mathcal{M}_{hi}$  dans la section 2.4, il est donc facile d'obtenir une base des espaces  $\mathcal{W}_h$  et  $\mathcal{M}_h$ .

On note le nombre de noeuds de  $\Omega_1$  =nbtneu1, le nombre de noeuds de  $\Omega_2$  =nbtneu2, le nombre de noeuds de  $\gamma$  =nbtneuf, le nombre total de noeuds de  $\Omega$  =nbtneu=nbtneu1+nbtneu2+nbtneuf, et le nombre total d'éléments =nbtel.

Il y a donc nbtneu fonctions de base  $\varphi_I$  et nbtel fonctions de base  $\Pi_L$ . Les fonctions de base ont trois composantes dont deux nulles.

$$\forall I \in \{1, \dots, \text{nbtneu}\}, \quad \varphi_I(x) = (\varphi_{I_1}(x), \varphi_{I_2}(x), \varphi_{I_f}(x))$$

On note  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  les triangles tels que  $I$  soit un noeud de  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{I_i}(x) = \begin{cases} \frac{l_I}{2\operatorname{mes}(\mathcal{K}_1)}(x - a_{I_1}) & , \text{ si } x \in \mathcal{K}_1 \\ \frac{l_I}{2\operatorname{mes}(\mathcal{K}_2)}(a_{I_2} - x) & , \text{ si } x \in \mathcal{K}_2 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \\ \varphi_{I_{i+1}} = 0 \\ \varphi_{I_f} = 0 \end{array} \right.$$

Un noeud  $I$  de  $\gamma$  peut appartenir à au plus 2 segments de  $\gamma$  :  $[a_{I-1}; a_I]$  et  $[a_I; a_{I+1}]$ , alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{I_f} = \begin{cases} \frac{x - a_{I-1}}{a_I - a_{I-1}} & , \text{ si } x \in [a_{I-1}; a_I] \\ \frac{x - a_{I+1}}{a_I - a_{I+1}} & , \text{ si } x \in [a_I; a_{I+1}] \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \\ \varphi_{I_i} = 0 \end{array} \right. , i = 1, 2$$

$$\forall I \in \{1, \dots, \text{nbtel}\}, \quad \Pi_{\mathcal{K}_I}(x) = (\Pi_{\mathcal{K}_{I_1}}(x), \Pi_{\mathcal{K}_{I_2}}(x), \Pi_{\mathcal{K}_{I_f}}(x))$$

Si  $\mathcal{K}_I$  est un élément de  $\Omega_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\mathcal{K}_{I_i}} = \mathbf{1}_{\mathcal{K}_I}(x) \\ \Pi_{\mathcal{K}_{I_{i+1}}} = 0 \\ \Pi_{\mathcal{K}_{I_f}} = 0 \end{array} \right.$$

Si  $\mathcal{K}_I$  est un élément de  $\gamma$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\mathcal{K}_{I_f}} = \mathbf{1}_{\mathcal{K}_I}(x) \\ \Pi_{\mathcal{K}_{I_i}} = 0 \end{array} \right. , i = 1, 2$$

A l'aide de ces bases, le problème approché se ramène à un système linéaire :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ Q \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_{IJ} &= \alpha_\xi(\varphi_J, \varphi_I) \quad , \quad \forall I, J \in \{1, \dots, \text{nbtneu}\} \\
B_{LI} &= \beta(\varphi_I, \Pi_L) \quad , \quad \forall I \in \{1, \dots, \text{nbtneu}\}, \forall L \in \{1, \dots, \text{nbtel}\} \\
U_I &= u(n_I) \quad , \quad \forall I \in \{1, \dots, \text{nbtneu}\} \\
P_L &= p(L) \quad , \quad \forall L \in \{1, \dots, \text{nbtel}\} \\
D_I &= L_d(\varphi_I) \quad , \quad \forall I \in \{1, \dots, \text{nbtneu}\} \\
Q_L &= L_q(\Pi_L) \quad , \quad \forall L \in \{1, \dots, \text{nbtel}\}
\end{aligned}$$

## 4.2 Résolution par volumes finis

Cette section présente la méthode de résolution par volumes finis ([6]).

### 4.2.1 Rappel sur les volumes finis en dimension 1 pour le laplacien

Soit  $I$  un intervalle et  $(M_i)$  une discrétisation de  $I$ . La figure 12 représente une maille. A chaque maille  $M_i$  on associe un point  $x_i$ , par exemple son milieu. On note  $h_i$  la longueur de la maille  $M_i$ ,  $h_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1})$  la différence entre les deux points.

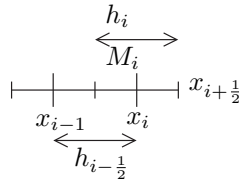


FIG. 12 – Maillage

On cherche à approcher la solution du problème suivant :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } I$$

On intègre l'équation sur chaque maille  $M_i$ .

$$\begin{aligned}
-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) &= \int_{M_i} -\Delta u \\
&= \int_{M_i} f \\
&= h_i f_i
\end{aligned}$$

où  $f_i$  désigne la moyenne de  $f$  sur  $M_i$ .

On se donne une inconnue par maille  $u_i \sim u(x_i)$ . On peut approcher  $u'$  aux extrémités des mailles.

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \sim \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

Le schéma volumes finis est alors le suivant :

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = h_i f_i$$

On peut remarquer que si  $h_i = h = h_{i+\frac{1}{2}}$ , alors on obtient :

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = h_i f_i$$

qui n'est autre que le schéma éléments finis  $\mathbb{P}_1$  ou le schéma différences finies classique.

Si les  $h_i$  ne sont pas constants, le schéma volumes finis n'est pas consistant au sens des différences finies, c'est-à-dire si on pose  $\bar{u}_i = u(x_i)$ , l'erreur de consistance au sens des différences finies est :

$$R_i = \frac{1}{h_i} \left( -\frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) - f_i$$

et  $\lim_{h \rightarrow 0} R_i \neq 0$ , exemple  $h_{2i} = h$  et  $h_{2i+1} = h/2$ .  
 Néanmoins, le schéma converge car il y a constance du flux

$$\overline{R_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{\overline{u_{i+1}} - \overline{u_i}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \longrightarrow 0$$

**Remarque sur la conservation des flux :**

On ajoute une inconnue  $u_\sigma$  : la valeur au point  $x_{i+\frac{1}{2}}$ .

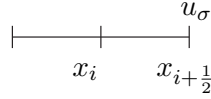


FIG. 13 – Maille du bord

On peut alors approcher la dérivée par :

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \sim \frac{u_\sigma - u_i}{d(x_{i+\frac{1}{2}}, x_i)} = F_{\sigma,i}$$

avec  $d(x_{i+\frac{1}{2}}, x_i) = d_i$  la distance entre  $x_{i+\frac{1}{2}}$  et  $x_i$ .

A l'autre extrémité, on a de même :

$$u'(x_{i+\frac{1}{2}}) \sim -\frac{u_\sigma - u_{i+1}}{d(x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1})} = -F_{\sigma,i+1}$$

Imposer la conservation du flux numérique revient à choisir :

$$u_\sigma = \frac{d_i u_{i+1} + d_{i+1} u_i}{d_{i+1} + d_i}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} F_{\sigma,i} &= \frac{\frac{d_i u_{i+1} + d_{i+1} u_i}{d_{i+1} + d_i} - u_i}{d_i} \\ &= \frac{u_{i+1} - u_i}{d_{i+1} + d_i} \end{aligned}$$

**Etude de la convergence :**

**Théorème 4.5**

*Le schéma converge si  $u \in H^2(\Omega)$ .*

**Démonstration :**

On a des fonctions qui sont constantes par maille, elles ne sont pas continues donc elle n'appartiennent pas à  $H^1$ .

On doit donc redéfinir une semi-norme  $H_0^1$  discrète :

$$\left( \sum_i h_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |u|_1$$

et obtenir un lemme de Poincaré discret :

$$\exists C > 0, \left( \sum_i h_i u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |u|_1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} &= h_i f_i \\ -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) &= h_i f_i \end{aligned}$$

avec  $u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\overline{u_{i+1}} - \overline{u_i}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \overline{R_{i+\frac{1}{2}}}$

En remplaçant  $u'$  par sa valeur la deuxième équation devient :

$$-\frac{\overline{u_{i+1}} - \overline{u_i}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\overline{u_{i-1}} - \overline{u_i}}{h_{i-\frac{1}{2}}} = h_i f_i - \overline{R_{i+\frac{1}{2}}} + \overline{R_{i-\frac{1}{2}}}$$

On définit l'erreur  $e_i = u_i - \overline{u_i}$ , on obtient alors :

$$-\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{e_{i-1} - e_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \overline{R_{i+\frac{1}{2}}} - \overline{R_{i-\frac{1}{2}}}.$$

Une intégration par partie discrète conduit alors à

$$\begin{aligned} -\sum_i \frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} e_i - \sum_i \frac{e_{i-1} - e_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} e_i &= \sum_i \overline{R_{i+\frac{1}{2}}} e_i - \sum_i \overline{R_{i-\frac{1}{2}}} e_i \\ \sum_i \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} &= \sum_i \overline{R_{i+\frac{1}{2}}} (e_i - e_{i+1}) \\ \sum_i h_{i+\frac{1}{2}} \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{(h_{i+\frac{1}{2}})^2} &= \sum_i \overline{R_{i+\frac{1}{2}}} (e_i - e_{i+1}). \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} |e|_1^2 &\leq |R|_1 |e|_1 \\ |e|_1 &\leq |R|_1 \\ |e|_1 &\leq Ch \end{aligned}$$

Il y a bien convergence. □

#### 4.2.2 Présentation d'un schéma volumes finis en dimension 2

Cette section présente un schéma volumes finis ([2]) appliqué au modèle asymptotique.

On discrétise le domaine  $\Omega = \bigcup \overline{\mathcal{K}}$  à l'aide de volumes de contrôle, par exemple des triangles :  $\mathcal{T} = \{\mathcal{K}\}$ . La solution du problème sera notée  $p = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}} p_{\mathcal{K}}$ , on a une inconnue  $p_{\mathcal{K}}$  pour chaque volume de contrôle

et  $\overline{p_{\mathcal{K}}} = p(x_{\mathcal{K}})$ , les  $x_{\mathcal{K}}$  sont les orthocentres des valeurs de contrôle  $\mathcal{K}$  illustrés dans la figure 14. On remarque que :  $x_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{L}} \perp \sigma = \mathcal{K} | \mathcal{L}$ .

On note l'ensemble des arêtes :  $\mathcal{E} = \{\sigma\}$ , et l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{K}$  :  $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ .

On intègre sur chaque volume de contrôle le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= q && \text{dans } \Omega && \text{(loi de conservation de masse)} \\ u &= -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} p && \text{dans } \Omega && \text{(loi de Darcy)} \end{aligned}$$

avec  $K = K \times Id$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \operatorname{div} u \, dx &= \int_{\mathcal{K}} q \, dx \\ \int_{\mathcal{K}} \operatorname{div} u \, dx &= \int_{\partial \mathcal{K}} u \cdot n \, ds \\ &= \int_{\partial \mathcal{K}} -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot n \, ds \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{\int_{\sigma} -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \cdot n \, ds}_{\sim F_{\mathcal{K}\sigma}} &= \operatorname{mes}(\mathcal{K}) q_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

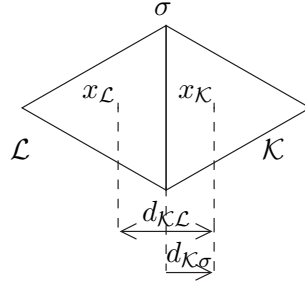


FIG. 14 – Maillage

avec  $F_{\mathcal{K}\sigma} = K \frac{p_\sigma - p_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}$ .

Si  $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ , c'est-à-dire  $\sigma$  est l'arête commune aux triangles  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{L}$ , alors la conservation des flux numériques nous impose :  $F_{\mathcal{K}\sigma} = -F_{\mathcal{L}\sigma}$ .

On pose la distance entre  $x_{\mathcal{K}}$  et  $x_{\mathcal{L}}$  :  $d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma} = d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}})$ .

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{K}\sigma} &= -F_{\mathcal{L}\sigma} \\ K \frac{p_\sigma - p_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} &= -K \frac{p_\sigma - p_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}} \\ p_\sigma &= \frac{d_{\mathcal{L}\sigma} p_{\mathcal{L}} + d_{\mathcal{K}\sigma} p_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_{\mathcal{K}\sigma} = K \text{mes}(\sigma) \frac{p_{\mathcal{K}} - p_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.$$

Le schéma s'écrit alors :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K}\sigma} = \text{mes}(\mathcal{K}) q_{\mathcal{K}} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}$$

**Etude de la convergence :**

**Théorème 4.6**

*Le schéma converge si  $u \in H^2(\Omega)$ .*

**Démonstration :**

Comme en dimension 1, on doit redéfinir une semi-norme  $H^1$  discrète, et un lemme de Poincaré discret.

La semi-norme discrète est notée :  $|p|_{1,\tau}$

$$|p|_{1,\tau} = \left( \sum_{\sigma} \text{mes}(\sigma) d_{\sigma} \left| \frac{Dp}{d_{\sigma}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où si  $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$ , alors  $Dp = |p_{\mathcal{K}} - p_{\mathcal{L}}|$  et  $d_{\sigma} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ .

si  $\sigma \in \partial\Omega$ , alors  $Dp = |p_{\mathcal{K}} - 0|$  (conditions aux bords) et  $d_{\sigma} = d_{\mathcal{K}\sigma}$ .

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K}\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F_{\mathcal{K}\sigma}} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{\left( \int_{\sigma} K \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot n_{\mathcal{K}} - \overline{F_{\mathcal{K}\sigma}} \right)}_{R_{\mathcal{K}\sigma}}$$

où  $\overline{F_{\mathcal{K}\sigma}} = K \text{mes}(\sigma) \frac{\overline{p_{\mathcal{L}}} - \overline{p_{\mathcal{K}}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}$ , on remarque que  $R_{\mathcal{K}\sigma} = -R_{\mathcal{L}\sigma}$ . On note  $R_{\sigma} = |R_{\mathcal{K}\sigma}|$  et on pose  $e_{\mathcal{K}} = \frac{\overline{p_{\mathcal{L}}} - \overline{p_{\mathcal{K}}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}$ .

On obtient donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{Kmes(\sigma) \frac{e_{\mathcal{K}} - e_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}}_{G_{\mathcal{K}\sigma}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} R_{\mathcal{K}\sigma}$$

On a aussi  $G_{\mathcal{K}\sigma} = -G_{\mathcal{L}\sigma}$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{K}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K}\sigma} \right) e_{\mathcal{K}} &= \sum_{\sigma} G_{\mathcal{K}\sigma} (e_{\mathcal{K}} - e_{\mathcal{L}}) \\ &= \sum_{\sigma} Kmes(\sigma) d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \frac{(e_{\mathcal{K}} - e_{\mathcal{L}})^2}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2} \\ |e|_{1,\tau}^2 &= \sum_{\mathcal{K}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} R_{\mathcal{K}\sigma} e_{\mathcal{K}} \\ &\leq \sum_{\sigma} R_{\sigma} (e_{\mathcal{K}} - e_{\mathcal{L}}) \\ &\leq \sum_{\sigma} d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} Kmes(\sigma) \frac{R_{\sigma}}{mes(\sigma)} \frac{e_{\mathcal{K}} - e_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \\ &\leq K|e|_{1,\tau} \left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} mes(\sigma) \left| \frac{R_{\sigma}}{mes(\sigma)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ |e|_{1,\tau} &\leq K \left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} mes(\sigma) \left| \frac{R_{\sigma}}{mes(\sigma)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme suivant 4.7 sur l'erreur de consistence, on a bien démontré que le schéma converge. □

**Lemme 4.7 (Erreur de consistence)**

$p \in H^2$ , alors

$$\left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} mes(\sigma) \left| \frac{R_{\sigma}}{mes(\sigma)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch.$$

**Démonstration :**

On applique la formule de Taylor avec reste intégrale. Pour tout  $y \in \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} p(x_{\mathcal{K}}) &= p(y) + \overrightarrow{\text{grad}} p(y)(y - x_{\mathcal{K}}) + \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt \\ p(x_{\mathcal{L}}) &= p(y) + \overrightarrow{\text{grad}} p(y)(y - x_{\mathcal{L}}) + \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{L}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{L}})^2 dt \\ p(x_{\mathcal{K}}) - p(x_{\mathcal{L}}) &= \overrightarrow{\text{grad}} p(y)(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) + \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt \\ &\quad - \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{L}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{L}})^2 dt \end{aligned}$$

On intègre sur  $\sigma$  et on multiplie par  $\frac{K}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}$ , on note  $\overrightarrow{n_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}$  le vecteur unitaire  $\overrightarrow{x_{\mathcal{K}}x_{\mathcal{L}}}$  et  $\overrightarrow{n_{\mathcal{K}}}$  le vecteur unitaire normal du triangle  $\mathcal{K}$  dans la figure 15.

$$\begin{aligned} Kmes(\sigma) \frac{p(x_{\mathcal{K}}) - p(x_{\mathcal{L}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} &= \int_{\sigma} K \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot n_{\mathcal{K}\mathcal{L}} dy \\ &\quad + \frac{K}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt dy \\ &\quad - \frac{K}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{L}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{L}})^2 dt dy \end{aligned}$$



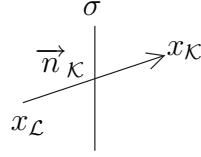


FIG. 15 – Arête

- Si  $\overrightarrow{n_{\mathcal{KL}}} = \overrightarrow{n_{\mathcal{K}}}$ , ie  $\overrightarrow{x_{\mathcal{K}}x_{\mathcal{L}}} \perp \sigma$ , alors

$$R_{\mathcal{K}\sigma} = \frac{K}{d_{\mathcal{KL}}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt dy - \frac{K}{d_{\mathcal{KL}}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{L}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{L}})^2 dt dy$$

Il y a consistance, car  $R_{\mathcal{K}\sigma} = O(h)$ . On démontrera le résultat ultérieurement.

- Si  $\overrightarrow{n_{\mathcal{KL}}} \neq \overrightarrow{n_{\mathcal{K}}}$ , alors

$$R_{\mathcal{K}\sigma} = \frac{K}{d_{\mathcal{KL}}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt dy - \frac{K}{d_{\mathcal{KL}}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{L}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{L}})^2 dt dy + \frac{K}{d_{\mathcal{KL}}} \int_{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} p \cdot (n_{\mathcal{K}} - n_{\mathcal{KL}}) dy$$

Il n'y a pas consistance, car  $R_{\mathcal{K}\sigma} = O(1)$ .

Revenons à l'estimation de l'erreur de consistance. Si les  $x_{\mathcal{K}}$  sont les orthocentres,  $\overrightarrow{n_{\mathcal{KL}}} = \overrightarrow{n_{\mathcal{K}}}$ . On parle de maillage admissible.

On note :

- $\mathcal{D}_{\sigma}$  la mesure du diamant de l'arête  $\sigma$  et des points  $x_{\mathcal{K}}$  et  $x_{\mathcal{L}}$ .
- $h = \max\{\mathcal{D}_{\sigma}\}$ .
- $\mathcal{V}_{\mathcal{K},\sigma}$  la moitié du diamant illustré dans la figure 16 :

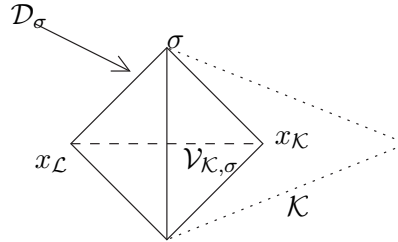


FIG. 16 – Diamant

On peut remarquer que si  $p \in C^2$ , on a bien la convergence :

$$K \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] \underbrace{\frac{(y - x_{\mathcal{K}})^2}{d_{\mathcal{KL}}}}_{\leq h} dt dy \leq K \text{mes}(\sigma) h \sup_{z \in \sigma} D^2 p(z)$$

$$\left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{KL}} \text{mes}(\sigma) \left| \frac{R_{\sigma}}{\text{mes}(\sigma)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{KL}} \text{mes}(\sigma) K^2 \left( \sup_{z \in \sigma} D^2 p(z) \right)^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\Omega) h$$

D'où

$$|e|_{1,\tau} \leq C(\Omega) h$$

Si  $p \in H^2$ ,

$$\int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt dy \leq \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] \mathcal{D}_{\sigma}^2 dt dy$$

On fait le changement de variable  $z = tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y$ ,  $(1-t) dt dy = \frac{dz}{d_{\mathcal{K}\sigma}}$ . On obtient alors :

$$\int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] \mathcal{D}_{\sigma}^2 dt dy \leq \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{K},\sigma}} D^2 p [z] \frac{\mathcal{D}_{\sigma}^2}{d_{\mathcal{K}\sigma}} dz$$

Comme  $\mathcal{D}_{\sigma} = \frac{mes(\sigma) d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{2}$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_{\sigma}^2}{mes(\sigma) d_{\mathcal{K}\sigma}} &= \mathcal{D}_{\sigma} \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{2 d_{\mathcal{K}\sigma}} \\ &\leq Ch \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{K}{mes(\sigma)} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) D^2 p [tx_{\mathcal{K}} + (1-t)y] (y - x_{\mathcal{K}})^2 dt dy &\leq K \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{K},\sigma}} D^2 p [z] \frac{\mathcal{D}_{\sigma}^2}{mes(\sigma) d_{\mathcal{K}\sigma}} dz \\ &\leq K \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{K},\sigma}} D^2 p [z] dz h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} mes(\sigma) \left| \frac{R_{\sigma}}{mes(\sigma)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left( \sum_{\sigma} d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} mes(\sigma) K^2 \left( \int_{\mathcal{V}_{\mathcal{K},\sigma}} D^2 p [z] dz \right)^2 h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(\Omega) h \\ |e|_{1,\tau} &\leq C(\Omega) h \end{aligned}$$

Il y a bien convergence.

□

### 4.2.3 Prise en compte de la fissure

On a déjà vu, dans le paragraphe 3, la prise en compte de la fissure pour le modèle asymptotique. En remplaçant dans l'équation (4) le saut de pression par sa valeur dans l'équation (5), on obtient le système suivant :

$$[u.n]_{\gamma} = d \partial_{\tau} (\overline{u.\tau}|_{\gamma}) + d q_f \quad (4)$$

$$\overline{u.\tau}|_{\gamma} = -K_{f\tau} \text{grad}_{\tau} p_f \quad (5)$$

$$\overline{u.n}|_{\gamma} = -K_{fn} \frac{[p]_{\gamma}}{d} \quad (6)$$

$$p_f = p_D|_{\gamma}$$

Pour chaque arête  $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\gamma}$  de la fissure on se donne une inconnue par volume  $\mathcal{K}$ , illustrée dans la figure 17 ( $p_{\sigma,\mathcal{K}}, p_{\sigma,\mathcal{L}}, p_{\sigma}$ ).

**Ecoulement à l'extérieur de la fissure :**

Le schéma s'écrit :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K}\sigma} = mes(\mathcal{K}) q_{\mathcal{K}}$$

avec

$$F_{\mathcal{K}\sigma} = \begin{cases} mes(\sigma) K \frac{p_{\mathcal{K}} - p_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int} \\ mes(\sigma) K \frac{p_{\mathcal{K}} - p_{D\sigma}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}^D \\ mes(\sigma) K \frac{p_{\mathcal{K}} - p_{\sigma\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \gamma \end{cases}$$

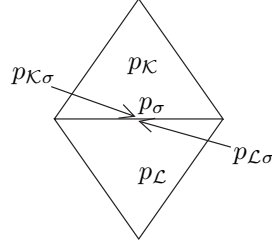


FIG. 17 – Inconnues

### Écoulement à l'intérieur de la fissure :

Sur chaque arête de la fissure, les arêtes  $\sigma_i$  sont numérotées de sorte que les arêtes  $\sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}$  sont contiguës. On intègre l'équation du saut de pression (4) dans la direction tangentielle et on l'approche par  $-d \left[ K_{f\tau} \overrightarrow{\text{grad}} p_f \right]_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} -d \int_{\sigma_i} \partial_\tau (K_{f\tau} \overrightarrow{\text{grad}} p_f) d\tau &= -d \left[ K_{f\tau} \overrightarrow{\text{grad}} p_f \right]_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \\ &= -d K_{f\tau} \left( \frac{p_{\sigma_{i+1}} - p_{\sigma_i}}{\text{mes}(\sigma_{i+\frac{1}{2}})} - \frac{p_{\sigma_i} - p_{\sigma_{i-1}}}{\text{mes}(\sigma_{i-\frac{1}{2}})} \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} -d \int_{\sigma_i} \partial_\tau (K_{f\tau} \overrightarrow{\text{grad}} p_f) d\tau &= - \int_{\sigma_i} [u \cdot n]_\gamma d\tau + d \int_{\sigma_i} q_f d\tau \\ &= (F_{K\sigma} + F_{L\sigma}) + d \text{mes}(\sigma_i) q_{\sigma_i} \\ &= \text{mes}(\sigma_i) K \left( \frac{p_{K\sigma} - p_{\sigma_i, K}}{d_{K, \sigma_i}} + \frac{p_{L\sigma} - p_{\sigma_i, L}}{d_{L, \sigma_i}} \right) + d \text{mes}(\sigma_i) q_{\sigma_i} \end{aligned}$$

D'où l'équation :

$$-d K_{f\tau} \left( \frac{p_{\sigma_{i+1}} - p_{\sigma_i}}{\text{mes}(\sigma_{i+\frac{1}{2}})} - \frac{p_{\sigma_i} - p_{\sigma_{i-1}}}{\text{mes}(\sigma_{i-\frac{1}{2}})} \right) = \text{mes}(\sigma_i) K \left( \frac{p_{K\sigma} - p_{\sigma_i, K}}{d_{K, \sigma_i}} + \frac{p_{L\sigma} - p_{\sigma_i, L}}{d_{L, \sigma_i}} \right) + d \text{mes}(\sigma_i) q_{\sigma_i}$$

avec  $\text{mes}(\sigma_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\text{mes}(\sigma_i) + \text{mes}(\sigma_{i+1})}{2}$  et  $q_{\sigma_i} = \frac{1}{\text{mes}(\sigma_i)} \int_{\sigma_i} q_f(s) ds$ .

### Conditions de raccord au niveau de la fissure :

Pour tout  $\sigma = \mathcal{K} | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_\gamma$ , on approche  $p_\sigma = \int_\sigma p_f d\tau$  par la méthode des trapèzes  $\frac{1}{2}(p_{\sigma, \mathcal{K}} + p_{\sigma, \mathcal{L}})$

$$p_\sigma = \frac{1}{2}(p_{\sigma, \mathcal{K}} + p_{\sigma, \mathcal{L}})$$

On intègre l'équation de la moyenne de la pression dans la direction tangentielle (6) :

$$\begin{aligned} \int_\sigma \overline{u \cdot n} |_\gamma d\tau &= - \int_\sigma K_{fn} \frac{[p]_\gamma}{d} d\tau \\ \frac{1}{2}(F_{K\sigma} - F_{L\sigma}) &= -\text{mes}(\sigma) K_{fn} \frac{[p]_\gamma}{d} \end{aligned}$$

$$\frac{K}{2} \left( \frac{p_{\mathcal{K}} - p_{\sigma, \mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}, \sigma}} - \frac{p_{\mathcal{L}} - p_{\sigma, \mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}, \sigma}} \right) = -\frac{K_{fn}}{d} (p_{\sigma, \mathcal{K}} - p_{\sigma, \mathcal{L}})$$

## 5 Comparaisons des différentes approximations

On va traiter 4 milieux différents :

- Un milieu imperméable avec  $K_{f\tau} = 0$  et  $K_{fn} = 10^{-5}$ ,
- Un milieu perméable avec  $K_{f\tau} = 10^6$  et  $K_{fn} = 100$ ,
- Un milieu étudié dans “ Jaffré” ([1]) avec  $K_{f\tau} = 100$  et  $K_{fn} = 100$ ,
- Un milieu intermédiaire avec  $K_{f\tau} = 10^6$  et  $K_{fn} = 10^{-8}$ .

On commence par comparer le modèle complet et le modèle asymptotique résolu par éléments finis (figures 18, 19, 20, 21) sur le problème (11) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \vec{u} &= -K \overrightarrow{\operatorname{grad}} p && \text{dans } \Omega \\ p &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ & \text{si } x \in [b, b+d], y = 0 \\ 1 & \text{si } x = b+d+c \\ & \text{si } x \in [b, b+d], y = a \end{cases} && (11) \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 && \text{si } y = 0 \text{ ou } a \text{ et } x \notin [b, b+d] \end{aligned}$$

Ces figures représentent, à gauche, le modèle complet et, à droite, le modèle asymptotique pour la fissure d'épaisseur  $d = 10^{-2}$ .

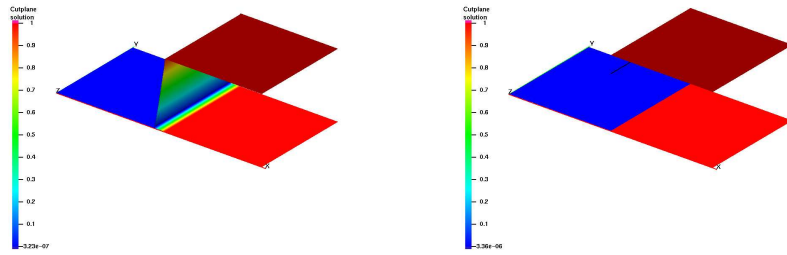


FIG. 18 – Milieu imperméable

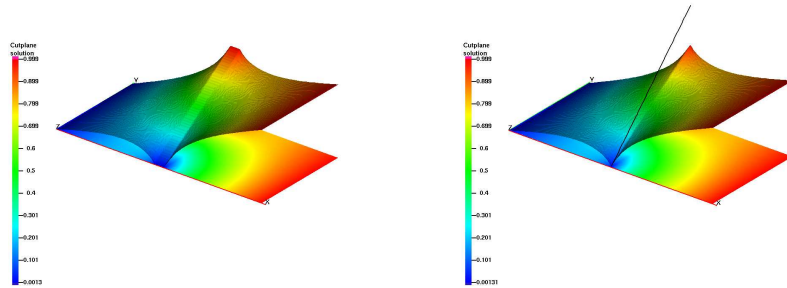


FIG. 19 – Milieu perméable

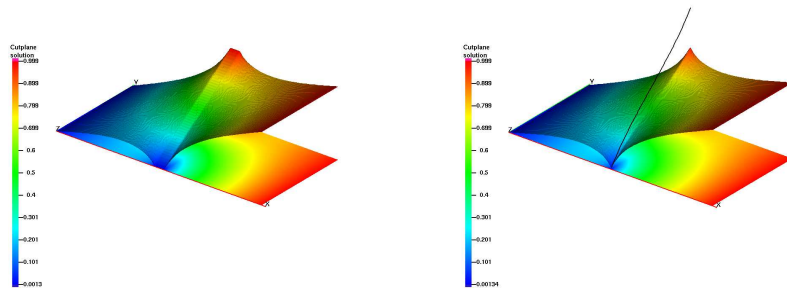


FIG. 20 – Milieu dit de Jaffré

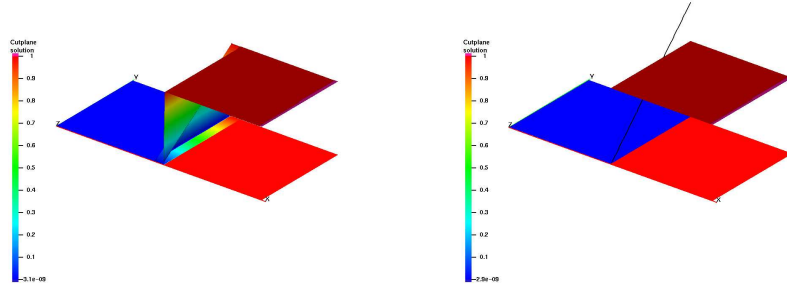


FIG. 21 – Milieu intermédiaire

Cette comparaison valide le modèle asymptotique. En effet, le modèle asymptotique donne les mêmes résultats que le modèle complet. Le temps de calcul est nettement amélioré.

Ces figures représentent le modèle asymptotique, à gauche, résolu par éléments finis et à droite, résolu par volumes finis pour la fissure d'épaisseur  $d = 10^{-2}$ .

On compare maintenant le modèle asymptotique résolu par éléments finis et celui résolu par volumes finis sur le problème (11) (figures 22, 23, 24, 25).

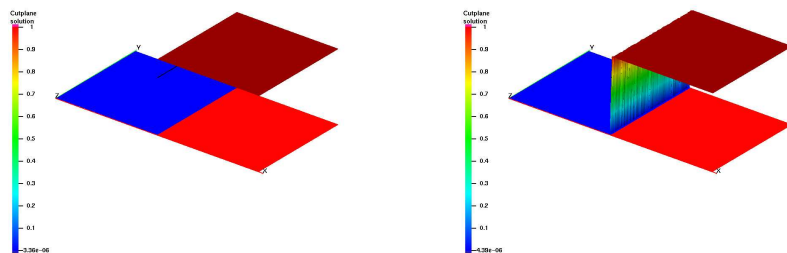


FIG. 22 – Milieu imperméable

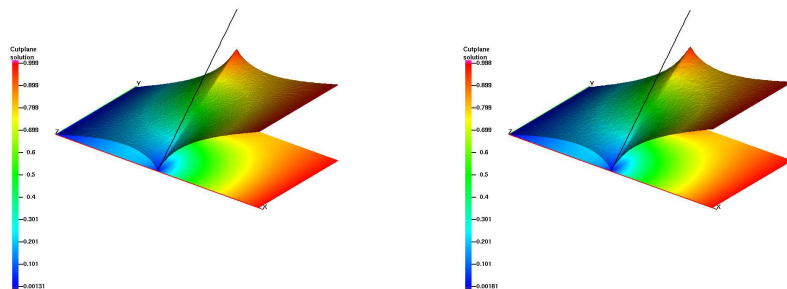


FIG. 23 – Milieu perméable

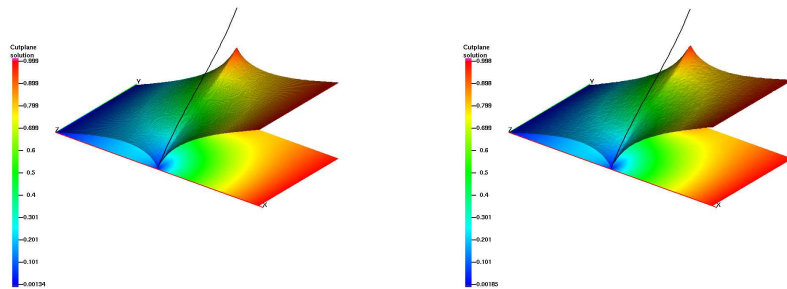


FIG. 24 – Milieu dit de Jaffré

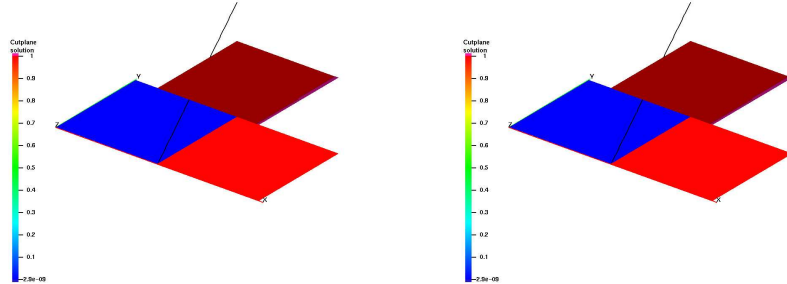


FIG. 25 – Milieu intermédiaire

On constate bien que les résultats pour le modèle asymptotique sont les mêmes quelle que soit la méthode de résolution utilisée.

Les résultats sont analogues pour les conditions limites (12) (figures 26, 27, 28, 29) :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\
 \vec{u} &= -K \vec{\operatorname{grad}} p && \text{dans } \Omega \\
 p &= \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ & \text{si } y = a \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x = b + d + c \end{cases} && (12)
 \end{aligned}$$

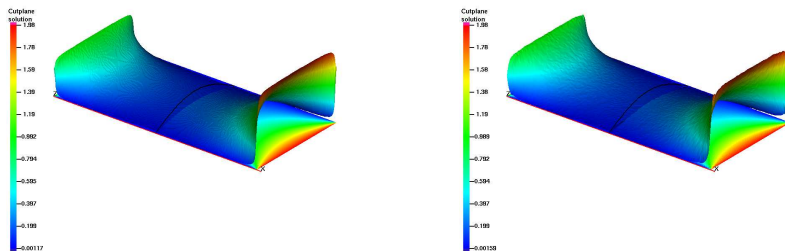


FIG. 26 – Milieu imperméable

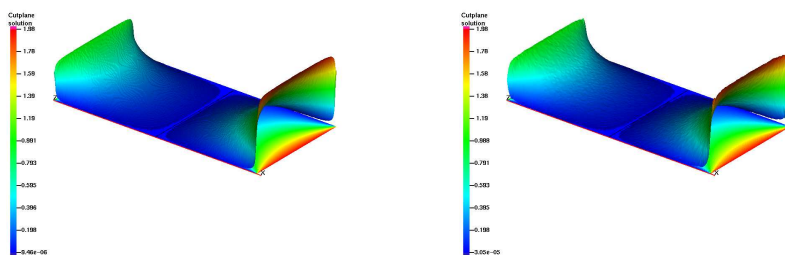


FIG. 27 – Milieu perméable

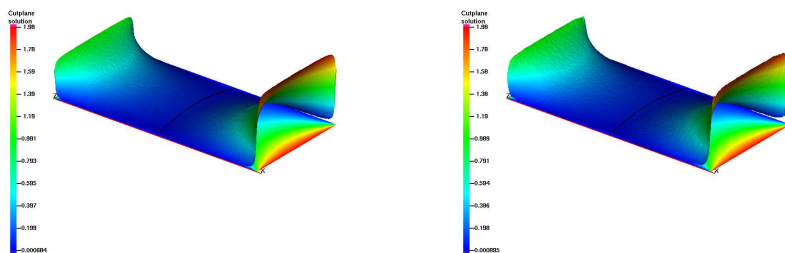


FIG. 28 – Milieu dit de Jaffré

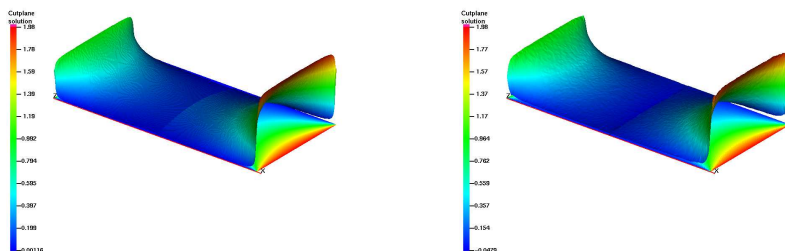


FIG. 29 – Milieu intermédiaire

Pour mieux visualiser le comportement de la pression à l'intérieur de la fissure, on fait le test (13) :

$$\begin{array}{rcl}
 \operatorname{div} \vec{u} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\
 \vec{u} & = & -K \vec{\operatorname{grad}} p \quad \text{dans } \Omega \\
 p & = & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ & \text{si } x \in [b, b+d], y = 0 \\ 2 & \text{si } x = b+d+c \\ 0.5 & \text{si } x \in [b, b+d], y = a \end{cases} \quad (13) \\
 \vec{u} \cdot \vec{n} & = & 0 \quad \text{si } y = 0 \text{ ou } a \text{ et } x \notin [b, b+d]
 \end{array}$$

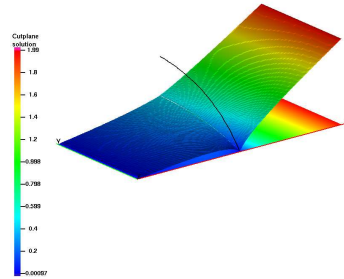


FIG. 30 – Pression non linéaire

On remarque sur la figure 30 que la pression à l'intérieur de la fissure n'est pas triviale.



## 6 Conclusion

L'objectif premier de ce stage était d'implémenter numériquement différentes méthodes conduisant à la résolution du système d'équations lié à une modélisation efficace des fissures de petite taille. L'implémentation par la méthode éléments finis du modèle complet présentée dans la première partie et la comparaison des résultats (modèle complet \ modèle asymptotique résolu par éléments finis) permettent une validation du modèle asymptotique. Les deux méthodes (éléments finis et volumes finis) de résolution des équations du modèle asymptotique conduisent à des résultats similaires.

L'implémentation de la méthode par volumes finis nécessite un travail préalable important sur le maillage, cependant la construction de la matrice du système linéaire ne présente pas de difficultés particulières ; alors que lors de l'implémentation de la méthode par éléments finis, la difficulté réside dans la construction de la matrice. La méthode par volumes finis semble donc être plus facile à mettre en œuvre. En effet, le "mailleur" dépend uniquement de la géométrie du problème traité, il est donc possible d'adapter des programmes déjà existants.

Le travail que nous avons effectué ne nous a pas permis d'évaluer comparativement le temps d'exécution des deux programmes (éléments finis et volumes finis). En effet, le programme éléments finis a été réalisé en langage C alors que le programme volume fini a été construit à l'aide de matlab.

Nous remercions chaleureusement tous les membres de l'équipe EDP du CMI pour nous avoir accueillis pendant ces deux mois et tout particulièrement Florence Hubert et Franck Boyer pour leurs compétences, leur disponibilité et leur gentillesse. Ce stage nous a permis d'appréhender le travail effectué dans un centre de recherche et d'apprécier la collaboration nécessaire des différents acteurs. Il nous a également permis d'accroître nos connaissances dans le domaine des méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles liées à la mécanique des fluides.

## Références

- [1] J. Jaffré, V. Martin, J-E. Roberts : *Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media*, SIAM J. Sci Comput, (2004).
- [2] P. Angot, F. Boyer, F. Hubert : *Modèle d'écoulement dans les fissures* , (2005).
- [3] F. Brezzi, M. Fortin : *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, (1991).
- [4] J-C. Latché : *Méthodes d'éléments finis pour quelques problème elliptiques linéaires issus de la mécanique des fluides*, Polycopié DESS ingénierie mécanique, (2002).
- [5] V. Girault, P-A. Raviart : *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, (1986).
- [6] R. Eymard, Th. Gallouët, R. Herbin : *Finite volume methods*, in “ Handbook of numerical analysis”, P.G. Ciarlet and J.L. Lions (Eds), (2000).