UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2014/2015
Algèbre 2
Durée 2 h

Contrôle Terminal

Documents, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
Justifier toute réponse. À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer. Ces résultats doivent être cités correctement.

Exercice 1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère le plan F d'équation $x + 2y - z = 0$ dans la base canonique.
On désigne par f la projection orthogonale $pr_F^{\perp}$ sur le plan F.

(a) Trouver une base orthonormée de F.

(b) Calculer $f(1, 3, -1)$ et $f(a, b, c)$ pour (a, b, c) quelconque dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Donner la matrice de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan F dans la base $\mathcal{B}$, puis sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Les deux vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (-1, 1, 1)$ sont non colinéaires et appartiennent au plan F, ils forment donc une base de F.
On remarque que ces deux vecteurs sont orthogonaux, pour avoir une base orthonormée de F il suffit alors de les normer.
On pose donc : $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$
La base $\{u_1, u_2\}$ ainsi déterminée est une base orthonormée de F.

(b) On obtient $pr_F^{\perp}(1, 3, -1) = \frac{1}{6}(-2, -2, 2)$ par le calcul général suivant :
On note : $w = (a, b, c)$, comme la base $\{u_1, u_2\}$ est orthogonale on a alors

$$\begin{aligned} f(a, b, c) = pr_F^{\perp}(w) &= \langle w|u_1\rangle\, u_1 + \langle w|u_2\rangle\, u_2 \\ &= \frac{1}{2}(a + c, 0, a + c) + \frac{1}{3}(a - b - c, -a + b + c, -a + b + c) \\ &= \frac{1}{6}(5a - 2b + c, -2a + 2b + 2c, a + 2b + 5c), \end{aligned}$$

ou bien, puisque $F^{\perp} = Vect((1, 2, -1))$

$$\begin{aligned} pr_F^{\perp}(w) = w - pr_{F^{\perp}}^{\perp}(w) &= (a, b, c) - \frac{a + 2b - c}{6}(1, 2, -1) \\ &= \frac{1}{6}(5a - 2b + c, -2a + 2b + 2c, a + 2b + 5c), \end{aligned}$$

ce qui pour $(a, b, c) = (1, 3, -1)$ donne $f(1, 3, -1) = \frac{1}{6}(-2, -2, 2)$.

(c) On obtient une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en réunissant la base $\{u_1, u_2\}$ de F et une base orthonormée $\{u_3\}$ de son supplémentaire orthogonal $F^\perp$.
$F^\perp$ est engendré par $(1, 2, -1)$ puisque dans la définition de F on peut remplacer $x + 2y - z = 0$ par $\langle (x, y, z) | (1, 2, -1) \rangle = 0$. On peut prendre alors $\{u_3 = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}\}$.
On a $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$, et $f(u_3) = 0$, ce qui prouve que A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ ainsi construite.

(d) Désignons par $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan F.
Alors $g(u_1) = u_1$, $g(u_2) = u_2$, et $g(u_3) = -u_3$, ce qui prouve que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que $g(w) = pr_F^\perp(w) - pr_{F^\perp}^\perp(w) = 2pr_F^\perp(w) - w = 2f(w) - w$.
Alors pour $w = (a, b, c)$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} g(w) = 2f(w) - w &= \frac{1}{3}(5a - 2b + c, -2a + 2b + 2c, a + 2b + 5c) - (a, b, c) \\ &= \frac{1}{3}(2a - 2b + c, -2a - b + 2c, a + 2b + 2c). \end{aligned}$$

La matrice de g dans la base canonique est alors

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels.

(a) Montrer que $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

(b) Soit l'application linéaire $f : E \to E$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé $f(P) := P'$.
Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.
L'application f est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer une base de E orthogonale pour le produit scalaire φ .

(a) On vérifie que $\varphi : (P, Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est bien un produit scalaire sur E.
La symétrie : c'est une conséquence triviale de la commutativité du produit des fonctions.
La bilinéarité : la distributivité du produit des fonctions, à gauche et à droite, par rapport à l'addition des fonctions, et la linéarité de l'intégrale permettent de vérifier facilement la bilinéarité.
La positivité : la fonction P^2 est positive sur $[0, 1]$ donc son intégrale l'est aussi.
Le caractère défini : comme la fonction P^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, son intégrale de 0 à 1 ne peut être nulle que si cette fonction est nulle sur $[0, 1]$. Comme c'est une fonction polynomiale, elle ne peut avoir une infinité de racines que si elle est la fonction nulle.

(b) $f(1) = 0, f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X$. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La seule valeur propre de A est $\lambda = 0$ et l'espace propre correspondant est de dimension 1, f n'est donc pas diagonalisable.

(c) Notons d'abord que $\|1\| = 1$, $\langle 1|X\rangle = 1/2$, $\|X\|^2 = 1/3$, $\langle 1|X^2\rangle = 1/3$, $\langle X|X^2\rangle = 1/4$, $\|X^2\|^2 = 1/5$. Le procédé de Gram-Schmidt donne

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = X - 1/2 \\ u_3 = X^2 - 1/3 - \frac{1/12}{1/12}(X - 1/2) = X^2 - X + 1/6. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) On désigne par S le produit ${}^tMM$. Que peut-on dire à priori (à l'aide des théorèmes du cours et sans calcul numérique) sur les valeurs propres et les vecteurs propres de S ?

(b) Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, formée de vecteurs propres de S.
On désigne par P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à cette base $\mathcal{B}$.
Calculer P^{-1}.

(c) Calculer $P^{-1}SP$ puis S^{2014}.

(d) Proposer une matrice diagonale D telle que $D^2 = P^{-1}SP$.
En déduire une matrice symétrique R telle que $R^2 = S$.

(e) (*Cas général*). On considère M une matrice $n \times m$ à coefficients réels.

(i) Montrer que la matrice $S := {}^tMM$ est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives ou nulles.

(ii) Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle R telle que $R^2 = S$.

(a) La matrice S est symétrique à coefficients réels.
Elle est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles et il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de S.

(b)

$$S = {}^tMM \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme $\lambda^2 - 10\lambda + 9$, soit 1 et 9. Elles sont simples. Les espaces propres sont donc deux droites orthogonales. L'espace propre associé à 1 est défini par la seule équation $x_1 - x_2 = 0$ et engendré par le vecteur $(1,1)$. L'espace propre associé à 9 est donc engendré par le vecteur $(-1,1)$. On peut donc prendre

$$\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) \text{ et on a } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La matrice P étant orthogonale, son inverse est égale à sa transposée.

(c) Le calcul donne

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

on en déduit que

$$S^{1024} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}^{1024} P^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1+9^{1024} & 1-9^{1024} \\ 1-9^{1024} & 1+9^{1024} \end{pmatrix}$$

(d) Il suffit de prendre

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ et } R = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) (i) Désignons par f l'application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui a M comme matrice dans les bases canoniques et par s l'application de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même qui a S pour matrice dans la base canonique. On vérifie d'abord que

$${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM{}^t({}^tM) = {}^tMM = S.$$

S est donc une matrice symétrique $m \times m$.
Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^m$ désignons par V la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.
Calculons $\langle f(v)|f(v)\rangle = \|f(v)\|^2$. C'est le produit de matrices

$${}^t(MV)MV = {}^tV{}^tMMV = {}^tVSV.$$

Le dernier produit représente le produit scalaire de v avec son image par l'application s. Choisissons maintenant pour v un vecteur propre de s de valeur propre λ. Alors $\langle v|s(v)\rangle$ est égal d'une part à $\lambda\|v\|^2$, d'autre part à $\|f(v)\|^2$. On en conclut que λ est positive ou nulle puisque v n'est pas nul.
(ii) Soit P une matrice dont les colonnes forment une base orthonormale de vecteurs propres de S. Notons que P est orthogonale : ${}^tP = P^{-1}$. Alors

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Posons

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Soit $R = PDP^{-1}$, on vérifie facilement que $R^2 = S$ et que R est symétrique

$${}^tR = {}^t(PD\,{}^tP) = P\,{}^tD\,{}^tP = R.$$