UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2014/2015**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 1
Page web : `http://math.unice.fr/~parus/A2_2013.html`

Exercice 1.
On considère la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1. Quel est le rang de A ?
1.2. Même question avec les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \\ 7 & 4 & 14 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 14 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3. Comment résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 4x + 9y = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 2x + y + 3z + = 0 \\ -x + + 2z - 5t = 0 \\ 7x + 4y + 14z + 5t = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} 2x - y + 7z = 0 \\ x + + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 14z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^3\,?$$

Exercice 2.
Ecrire sous forme matricielle le problème suivant :
Trouver deux quadruplets différents d'entiers $(a,\ b,\ c,\ d)$ *tels que :*
La moyenne de a *et* b *est* 6*, la moyenne de* b *et* c *est* 8*, la moyenne de* c *et* d *est* 7 *et la moyenne de* a *et* d *est* 5.
Résoudre le problème.
Même question pour les moyennes : 6, 8, 5, 7.

Exercice 3.
Est-ce que les familles suivantes sont libres :

1. $((1, 6, 8, 3))$ dans $\mathbb{R}^4$,
2. $((1, 6, 8, 3), (1, 8, 0, -3))$ dans $\mathbb{R}^4$,
3. $((1, 6, 8, 3), (1, 8, 0, -3), (0, 1, -4, -3))$ dans $\mathbb{R}^4$,
4. $((0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 7, 3, 0), (-2, 1, 6, 8, -3))$ dans $\mathbb{R}^5$,

Extraire de chacune d'elles une famille libre maximale.

Exercice 4.
4.1. Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne le sous-ensemble

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y - z = 0\}.$$

Trouver une application linéaire dont le noyau est P. Conclure sur la nature de P. Trouver une base de P.
4.2. On se donne maintenant le sous-ensemble

$$L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y - z = 0 \text{ et } 6x - 4y + 3z = 0\}.$$

Trouver une application linéaire dont le noyau est L. Conclure sur la nature de L. Trouver une base de L.

Exercice 5.
Pour chacune des applications linéaires T suivantes :

1. Ecrire sa matrice dans les bases canoniques.
2. Déterminer le noyau et l'image de T. Donner la dimension et une base de chacun de ces sous-espaces.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (2x + y, x - y)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x - 3y, -x + 3y)$.
   (c) $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T_\alpha(x, y) = (x + \alpha y, 2 + 5y)$, (selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$).
   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (z, x - y, 0)$.
   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (x - y, x + y, x + 3y)$.

Exercice 6.
On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ donnée par : $T(1, 0, 0, 0) = (-1, -1, -1, 0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, -2, -2, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 2, 0, -2)$, $T(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0, 2, 2)$. Déterminer la matrice, le rang, l'image et le noyau de T .