UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2014/2015**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 3

Exercice 1.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.1. Le vecteur $(1,1,0)$ est-il un vecteur propre de A ? Si oui pour quelle valeur propre ? On désigne alors par E l'espace propre associé à cette valeur propre. Déterminer une base de E.
1.2. Même question pour la matrice B.
1.3. On désigne par $E^\perp$ l'ensemble de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui sont orthogonaux à E. Calculer une base de $E^\perp$ et montrer que $E^\perp$ est également un espace propre de A.
1.4. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Exercice 2.
On considère la matrice suivante de $M_3(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & -3 \\ 3 & -3 & \frac{17}{2} \end{pmatrix}.$$

2.1. Est-ce que le vecteur $\vec{u} = (1,-2,-1)$ est un vecteur propre de M ?
Si oui quelle est la valeur propre correspondante ? Déterminer une base de l'espace propre E associé à cette valeur propre.
2.2. Montrer que $\frac{21}{2}$ est une valeur propre de M et déterminer l'espace propre correspondant.
2.3 Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice M.
2.4. On désigne par $\vec{v}_0$ le vecteur $(0,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}_0$ dans la base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
2.5. On considère la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de premier terme $\vec{v}_0$ définie par $\vec{v}_{n+1} = M\vec{v}_n$ pour $n \geq 0$. Quel est le comportement de la suite $\{\vec{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 3.
3.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit λ un réel. Déterminer le rang de $A - \lambda I_2$ en fonction de la valeur de λ. Quelles sont les valeurs propres de A ? Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ composée de vecteurs propres de A ?
3.2. Mêmes questions en remplaçant A et $\mathbb{R}^2$ par $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.
4.1. Caractériser les matrices $M \in M_4(\mathbb{R})$ telles que 0 soit valeur propre de M.

4.2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice suivante

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.
On considère la matrice suivante

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

5.1. Calculer P^2 (c'est à dire le produit de matrices PP).
5.2. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ avec $P\vec{v} = \lambda\vec{v}$, quelles sont les valeurs possibles de λ ?
5.3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de P.
5.4. Donner le nom de l'application linéaire $\varphi_P \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est P.

Exercice 6.
Calculer les déterminants des matrices suivantes. Précisez les matrices qui sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} \pi & 3\pi & 2\pi \\ -2e^{\pi} & -e^{\pi} & 2e^{\pi} \\ 30 & 160 & 120 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.
7.1. Montrer la formule

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

7.2. Evaluer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ \cos(x) & \cos(2x) & \cos(3x) \\ \cos(2x) & \cos(3x) & \cos(4x) \end{vmatrix}$$