

Exercice 1.

Pour chacune des matrices suivantes :

- 1.1 Calculer son polynôme caractéristique sous une forme factorisée.
- 1.2 En déduire sa ou ses valeurs propres réelles.
- 1.3 Calculer les dimensions des espaces propres associés à ses valeurs propres réelles.
- 1.4 En déduire si elle est diagonalisable sur \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1.5 Parmi les matrices ci-dessus, lesquelles ne sont pas diagonalisables sur \mathbb{C} ?

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 2.1 Calculer le polynôme caractéristique de u .
- 2.2 Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
- 2.3 En déduire que u est diagonalisable et le diagonaliser dans une base explicite.

Exercice 3.

Ici, le corps de base est le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

Soit E un plan vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On considère l'endomorphisme ϕ de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

- 3.1 Calculez et factorisez le polynôme caractéristique de ϕ .
- 3.2 ϕ est-il diagonalisable ? Si oui construire une base de E qui le diagonalise .
- 3.3 Mêmes questions avec l'endomorphisme ψ de E de matrice $C = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

Exercice 4.

On considère l'application linéaire ψ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

- 4.1 Soit la partie de \mathbb{R}^2 suivante : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$.
Représenter graphiquement K et $\psi(K)$.
- 4.2 Montrer que ψ est diagonalisable et le diagonaliser dans une base (v, w) de \mathbb{R}^2 .
- 4.3 Soit la partie de \mathbb{R}^2 suivante : $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \alpha v + \beta w \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ et } 0 \leq \beta \leq 1\}$.
Représenter graphiquement L et $\psi(L)$.

Exercice 5.

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 , dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 5.1 Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, et les espaces propres de u .
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
- 5.2 Calculer $(A - I)^2$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $A^n = nA + (1 - n)I$.
- 5.3 Soient $P(X) = (X - 1)^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de Q par P en fonction de $Q(1)$ et $Q'(1)$, où Q' est le polynôme dérivé de Q .
En remarquant que $P(A)=0$ et en utilisant le résultat précédent avec un choix judicieux du polynôme Q , retrouver l'expression de A^n .

Exercice 6.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et \mathcal{H} un endomorphisme de E .

On veut montrer que si pour un entier donné $k < n$, tous les sous-espaces de dimension k de E sont stables par \mathcal{H} alors \mathcal{H} est une homothétie vectorielle (i.e $\mathcal{H} = \lambda Id_E$, $\lambda \in \mathbb{K}$).

Commencer par étudier le cas où $k = 1$.

Pour $0 < k < n$ vous pourrez commencer par montrer que si F est un sev de E de dimension $k - 1$, il est l'intersection de deux sev de dimension k .

Exercice 7.

Soit E un plan vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R},$ ou \mathbb{C} et (e_1, e_2) une base donnée de E .

Pour a et b donnés dans \mathbb{K} , on considère l'endomorphisme Φ de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ a & b \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2) .

7.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Etudier le rang de l'endomorphisme $\Phi - \lambda Id_E$ en fonction de $\lambda, a,$ et b et en déduire l'ensemble des valeurs propres de Φ selon les valeurs de a et b .

7.2 Pour quelles valeurs du couple (a, b) l'endomorphisme Φ est-il non diagonalisable ?

7.3 Quand il l'est, diagonaliser l'endomorphisme Φ dans une base de E explicite.

Exercice 8.

Soient a, b, c trois réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, et ϕ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice dans la base

canonique
$$F = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

8.1 Calculer le déterminant de ϕ et son rang.

8.2 Déterminer l'image et le noyau de ϕ , comparez-les.

8.3 On pose $\psi = Id_{\mathbb{R}^3} - \phi$.

Calculer les matrices de $\phi^2, \psi \circ \phi, \phi \circ \psi$ et ψ^2 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

8.4 Déterminer l'image et le noyau de ψ , comparez-les avec ceux de ϕ .

8.5 Déterminer les valeurs propres et espaces propres de ϕ et ψ .

8.6 Caractériser géométriquement les endomorphismes ϕ et ψ .