UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2014/2015**
Faculté des Sciences Algèbre 2
Département de Mathématiques Feuille 5
Page web : `http://math.unice.fr/~parus/A2_2013.html`

Exercice 0 : À FAIRE AVANT LE TD.
Lire la partie du cours 2012–2013 rédigée par M. Merle concernant l'orthogonalité :
`http://math.unice.fr/~merle/Algebre2/2Cours_Alg2.pdf`, pages 1–6

Exercice 1 : *Systèmes de Vandermonde.*

1.1. Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre n suivante :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1.2. Étant donnée une famille $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ de n points du plan, avec les x_i deux à deux distincts, on cherche les polynômes de degré au plus $n-1$, i.e. de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1},$$

dont le graphe passe par tous les points de la famille.

a. Décrire le problème sous forme d'un système linéaire faisant intervenir la matrice V.
b. En déduire qu'il existe un unique polynôme solution du problème.
c. Expliciter le polynôme obtenu pour les familles suivantes :

$$((1,1),(2,0),(3,1)) \qquad \text{et} \qquad ((-2,1),(-1,0),(0,2),(2,2))$$

Exercice 2.
On considère dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, un sous-espace vectoriel F et un vecteur x. Calculer la projection orthogonale de x sur F pour les données suivantes :

2.1. $n = 2$, $x = (1,1)$, $F = \mathrm{Vect}((1,2))$.
2.2. $n = 4$, $x = (1,-1,0,1)$, $F = \mathrm{Vect}((1,1,2,-1),(3,1,1,-2))$.
2.3. $n = 4$, $x = (1,-1,0,1)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\}$.
2.4. $n = 4$, $x = (1,-1,0,1)$, $F = \{3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

Exercice 3.
On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel ainsi que la famille de vecteurs
$\mathcal{F} = ((1,2,1,0),(0,-1,2,1),(-1,0,1,2))$.

3.1. Justifier que l'on peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $\mathcal{F}$.
3.2. Orthonormaliser la famille $\mathcal{F}$.
3.3. Peut-on en déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ pour le produit scalaire usuel ?

Exercice 4.

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

4.1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

4.2. Existe-t-il $A \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P(0) = \varphi(A, P)$?

4.3. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 5 : *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*

5.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2 - 1} \leq \frac{n}{2}\sqrt{(n-1)(n+3)}$.

5.2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$

5.3. Résoudre l'équation

$$(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6 : *Projecteurs orthogonaux.*

Soient E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E.

6.1. Rappeler les définitions de projecteur et de projecteur orthogonal.

6.2. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Indications : pour le premier sens, on pourra appliquer le théorème de Pythagore et pour la réciproque, on pourra étudier les variations de l'application $f(t) = \|x + ty\|^2$ pour des vecteurs x et y bien choisis.

Exercice 7 : *Matrice et déterminant de Gram.*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on définit la matrice de Gram de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ par $G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$ et le déterminant de Gram de cette même famille par $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \det(G(x_1, \ldots, x_n))$.

7.1. Montrer que $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{rg}(G(x_1, \ldots, x_n))$.
Indication : on pourra s'intéresser aux colonnes de la matrice de Gram.

7.2. Montrer que si $x_1 \perp x_i$ pour tout $i = 2, \ldots, n$ alors $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \|x_1\|^2 \gamma(x_2, \ldots, x_n)$.

7.3. a. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
b. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
Remarque : le déterminant de Gram est donc toujours positif.

7.4. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie admettant une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Notons, pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F.

Montrer que $\gamma(x, e_1, \ldots, e_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \cdot \gamma(e_1, \ldots, e_n)$ ie $d(x, F) = \sqrt{\dfrac{\gamma(x, e_1, \ldots, e_n)}{\gamma(e_1, \ldots, e_n)}}$.