3 Systèmes linéaires

On désignera par $\mathbf{K}$ l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes ou plus généralement un corps quelconque.

3.1 Définitions

Équation linéaire à n variables : Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, $b \in \mathbf{K}$:

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

est appelée équation linéaire à n variables. Les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont appelés variables, l'élément a_i est appelé le coefficient de la variable x_i, l'élément b est appelé constante ou second membre de l'équation (E).

Si $b = 0$, on dit que l'équation (E) est homogène ou sans second membre.

Solution d'une équation linéaire à n variables : La donnée $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$ est appelée solution de l'équation (E) si :

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

Cas particuliers : Si $a_1 = \ldots = a_n = b = 0$ toutes données $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n élements de $\mathbf{K}$ est solution de E. Si $a_1 = \ldots = a_n = 0$ et $b \neq 0$, l'équation (E) n'a pas de solutions.

Système de m équations linéaires à n variables :

$$\left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array}\right. .$$

Solution d'un système de m équations linéaires à n variables : C'est la donnée $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$ solution de chacune des équations du système.

Exemple : Considérons le système à coefficients rationnels de 2 équations linéaires de variables x, y, z :

$$\left[\begin{array}{rcrl} x+y+z & = & 0 & (E_1) \\ 2x+2y+z & = & -1 & (E_2) \end{array}\right. .$$

Le triplet $(-2, 1, 1)$ est solution de ce système.

3.2 Transformation d'un système sans changer les solutions

Considérons les deux équations linéaires à n variables :

$$\left[\begin{array}{rcll} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & b & (E) \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n & = & b' & (E') \end{array}\right. .$$

On appelle équation obtenue en multipliant (E) par $\lambda \in \mathbf{K}$ et on note (λE) l'équation :

$$(\lambda E) \quad \lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \cdots + \lambda a_nx_n = \lambda b \quad .$$

On appelle équation obtenue en soustrayant l'équation (E) à l'équation $(E)'$ et on note $(E - E')$ l'équation :

$$(E - E') \quad (a_1 - a'_1)x_1 + a_2x_2 + \cdots + \lambda(a_n - a'_n)x_n = b' - b \quad .$$

On remarquera que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$; le systéme formé des 2 équations (E) et (E') a mêmes solutions que le système formé par les 2 équations (E) et $(E' - \lambda E)$

Proposition 3.2.1 *Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'un système linéaire :*

1. *Permuter deux équations,*
2. *Multiplier une équation par un élément non nul de* $\mathbf{K}$*,*

3. Soustraire d'une équation le produit d'une autre par un élément de $\mathbf{K}$*,*

4. Supprimer ou ajouter l'équation : $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$*.*

Exemple : Les deux systèmes suivants ont mêmes solutions :

$$\left[\begin{array}{rcll} x+y+z & = & 3 & (E_1) \\ 2x-y+z & = & 4 & (E_2) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{rcll} x+y+z & = & 3 & (E_1) \\ -3y-z & = & -2 & (E_2-2E_1) \end{array}\right. .$$

3.3 Solutions d'un système d'équations linéaires, exemples

Notation 3.3.1 *On note* $\mathbf{K}^n$ *l'ensemble dont les éléments sont la donnée de* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *de* n *élemenents de* $\mathbf{K}$*. Un élément de* $\mathbf{K}^n$ *est appelé un* n*-uplet d'éléments de* $\mathbf{K}$*.*

Opérations sur K^n **:** Soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n), (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) \in \mathbf{K}^n$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\begin{array}{ll} \text{addition :} & (s_1, s_2, \ldots, s_n) + (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) = (s_1 + s'_1, s_2 + s'_2, \ldots, s_n + s'_n) \ , \\ \text{multiplication par} \lambda \in \mathbf{K} : & \lambda(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (\lambda s_1, \lambda s_2, \ldots, \lambda s_n) \ . \end{array}$$

$\mathbf{K}^n$, muni de l'addition, est un groupe commutatif de neutre $(0, 0, \ldots, 0)$ noté 0. Autrement dit, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll} \forall u, v, w \in \mathbf{K}^n & : \ (u+v)+w = u+(v+w) \quad \text{noté} \ \ u+v+w \\ \forall u \in \mathbf{K}^n & : \ u+0 = 0+u = u \\ \forall u = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbf{K}^n & : \ u+(-u) = (-u)+u = 0 \quad \text{oú} \ \ -u = (-s_1, -s_2, \ldots, -s_n) \\ \forall u, v \in \mathbf{K}^n & : \ u+v = v+u \end{array}$$

La multiplication par un élément de $\mathbf{K}$ vérifie :

$$\forall u \in \mathbf{K}^n \ ; \ \forall \lambda \ , \mu \in \mathbf{K} \quad : \quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u \quad \text{et} \quad 1u = u \quad .$$

Ces lois sont compatibles au sens suivant : $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall u, v \in \mathbf{K}^n$:

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u+v) = \lambda u + vv \quad .$$

On notera que pour tout $u \in \mathbf{K}^n$: $0u = 0$ et $(-1)u = -u$.

Définition 3.3.2 *(combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{K}^n$) Soit $u_1, u_2, \ldots, u_r \in \mathbf{K}^r$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{K}^r$. L'élément $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r$ est appelé une combinaison linéaire des éléments $u_1, u_2, \ldots, u_r$.*

Cas particulier, $r = 1$: Pour $u \in \mathbf{K}^n$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, λu est appelé multiple de u.

Exemple 1 : Nous prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Expliciter les solutions de l'équation linéaire à deux variables :

$$(E) \quad 3x + 5y = 3 \quad .$$

Le couple de réels (x, y) est une solution de (E) si et seulement si :

$$3x = 3 - 5y \quad \text{ou encore} \quad x = 1 - \frac{5}{3}y \quad .$$

Ainsi, toute solution (x, y) de (E) est déterminée par la seule valeur de y. Si S désigne l'ensemble des solutions de (E), on a donc :

$$S = \{(1 - \frac{5}{3}y, y) \quad \text{tels que} \quad y \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2 \quad .$$

Or, on vérifie que $(1 - \frac{5}{3}y, y) = (1, 0) + y(-\frac{5}{3}, 1)$. Ainsi :

$$S = \{(1, 0) + y(-\frac{5}{3}, 1) \quad \text{tels que} \quad y \in \mathbf{R} \quad .\}$$

En prenant en particulier $y = 0$, on obtient que $(1, 0) \in S$ (ce que l'on peut vérifier facilement) . On note que l'ensemble S est ainsi l'ensemble des sommes de $(1, 0)$ avec les multiples de $(-\frac{5}{3}, 1)$.

Considérons $\mathcal{P}$ un plan géomètrique muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'application :

$$\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P} \quad , \quad (x, y) \longmapsto \text{le point } M \text{ de coordonnées } (x, y)$$

identifie $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{P}$. Les solutions de l'équation (E) s'identifient alors à la droite de $\mathcal{P}$ passant par le point A de coordonnées $(1, 0)$ et de direction le vecteur de coordonnées $(-\frac{5}{3}, 1)$.

Plus généralement, soit $a, b \in \mathbf{K}$ non simultanément nuls, $c \in \mathbf{K}$. Nous allons exprimer les solutions de l'équation $ax + by = c$ comme somme d'une solution particulière et des multiples d'un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, ces solutions s'identifient à une droite D. Nous distingons quatre cas :

1) cas particulier , b= 0 : S= $\{(\frac{c}{a}, y) \quad y \in \mathbf{K}\} = \{(\frac{c}{a}, 0) + y(0,1) \quad y \in \mathbf{K}\}$.
$ax = c$

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, S s'identifie à la droite verticale passant par le point $(\frac{c}{a}, 0)$.

2) cas particulier , a= 0 : S= $\{(x, \frac{c}{b})\ ;\ x \in \mathbf{K}\} = \{(0, \frac{c}{b}) + x(1,0)\ ;\ x \in \mathbf{K}\}$.
$by = c$

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, S s'identifie à la droite horizontale passant par le point $(0, \frac{c}{b})$.

3) cas particulier , c= 0 : S= $\{\lambda(-b, a)\ ;\ \lambda \in \mathbf{K}\}$.
$ax + by = 0$

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, S s'identifie à la droite passant par l'origine de direction le vecteur de coordonnées $(-b, a)$.

4) cas particulier , $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$: S= $\{(\frac{c}{a}, 0) + y(-\frac{b}{a}, 1)\ ;\ y \in \mathbf{K}\} = \{(\frac{c}{a}, 0) + \lambda(-b, a)\ ;\ \lambda \in \mathbf{K}\}$.
$ax + by = c$

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, S s'identifie à une droite passant par les deux points de coordonnées $(\frac{c}{a}, 0)$ et $(0, \frac{c}{b})$.

Exemple 2 : Nous prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Expliciter les solutions de l'équation linéaire à trois variables :

$$(E) \quad x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \quad .$$

Le triplet de réels (x, y, z) est une solution de (E) si et seulement si :

$$x = 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z \quad .$$

Ainsi, toute solution (x, y, z) de (E) est déterminée par les seules valeurs de y et z. Si S désigne l'ensemble des solutions de (E), on a donc :

$$S = \{(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z, y, z) \quad \text{tels que} \quad y \ , \ z \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3 \quad .$$

Or, on vérifie :

$$(1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z, y, z) = (1, 0, 0) + y(-\frac{1}{2}, 1, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1) \quad .$$

Ainsi :

$$S = \{(1, 0, 0) + y(-\frac{1}{2}, 1, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad y \ , \ z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

En prenant en particulier $y = z = 0$, on obtient que $(1, 0, 0) \in S$. L'ensemble S est donc l'ensemble des sommes de $(1, 0, 0)$ avec toutes les combinaisons linéaires de $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$. On peut vérifier que $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 3)$ sont des éléments de S.

Considérons $\mathcal{E}$ un espace géomètrique muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'application :

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathcal{E} \quad , \quad (x, y, z) \longmapsto \text{le point } M \text{ de coordonnées } (x, y, z)$$

identifie $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{E}$. Les solutions de l'équation (E) s'identifie alors au plan de $\mathcal{E}$ passant par le point A de coordonnées $(1, 0, 0)$ et de direction les vecteurs de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ et $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$.

Plus généralement, soit $a, b, c, d \in \mathbf{K}$ et $a \neq 0$. Considérons l'équation linéaire :

$$(E) \quad ax + by + cz = d \quad .$$

Le triplet $(x, y, z) \in \mathbf{K}^3$ est une solution de (E) si et seulement si :

$$x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z \quad .$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{(\frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z, y, z) \quad \text{tels que} \quad y\ ,\ z \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3 \quad .$$

Or, on vérifie :

$$(\frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z, y, z) = (\frac{d}{a}, 0, 0) + y(-\frac{b}{a}, 1, 0) + z(-\frac{c}{a}, 0, 1) \quad .$$

Ainsi :

$$S = \{(\frac{d}{a}, 0, 0) + y(-\frac{b}{a}, 1, 0) + z(-\frac{c}{a}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad y\ ,\ z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Cela montre que S est l'ensemble des sommes d'une solution particulière $(\frac{d}{a}, 0, 0)$ et des combinaisons linéaires des triplets $(-\frac{b}{a}, 1, 0)$ et $(-\frac{c}{a}, 0, 1)$. Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, S s'identifie à un plan de l'espace. Si de plus les trois réels a, b, c sont non nuls ce plan est celui qui passe par les trois points de coordonnées respectivement $(\frac{d}{a}, 0, 0)$, $(0, \frac{d}{b}, 0)$ et $(0, 0, \frac{d}{c})$.

Exemple 3 : Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, résoudre le système d'équations linéaires :

$$\left[\begin{array}{rcll} 3x + 4y & = & 3 & (E_1) \\ 2x + y & = & 1 & (E_2) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a les mêmes solutions que le système :

$$\left[\begin{array}{rcll} 3x + 4y & = & 3 & (E_1) \\ -\frac{5}{3}y & = & -1 & (E_2 - \frac{2}{3}E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est solution du système, la deuxième équation donnd $y = \frac{3}{11}$. En tenant compte de la première équation, on obtient $x = \frac{1}{5}$. Ainsi, si le couple de réel (x, y) est solution, $(x, y) = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$. Ce couple est bien solution. Ainsi, le couple $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ est l'unique solution de ce système.

Exemple 4 : Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, expliciter les solutions du système :

$$\left[\begin{array}{rcrl} x - 2y + z & = & 0 & (E_1) \\ -4x + 5y + 9z & = & -9 & (E_2) \end{array}\right. .$$

Ce système équivaut au système :

$$\left[\begin{array}{rcrl} x - 2y + z & = & 0 & (E_1) \\ -3y + 13z & = & -9 & (E_2 + 4E_1) \end{array}\right. .$$

Si (x, y, z) est une solution, on obtient $y = 3 + \frac{13}{3}z$. En substituant cette valeur de y dans le première équation, on obtient $x = 6 + \frac{23}{3}z$. Ainsi le triplet de réel (x, y, z) s'exprime à l'aide de z. L'esnsemble S des solutions est donc :

$$S = \{(6 + \frac{23}{3}z, 3 + \frac{13}{3}z, z) \; ; \; z \in \mathbf{R}\} = \{(6, 3, 0) + z(\frac{23}{3}, \frac{13}{3}, 1) \; ; \; z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, S est l'ensemble des sommes de $(6, 3, 0)$ avec tous les multiples de $(\frac{23}{3}, \frac{13}{3}, 1)$. Géométriquement, S correspond à la droite passant par le point de coordonnées $(6, 3, 0)$ dirigée par le vecteur $(\frac{23}{3}, \frac{13}{3}, 1)$.

Plus généralement, lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, les solutions d'un système linéaire à deux (resp. trois) variables correspondent à l'intersection du système de droites (resp. plans) correspondants à chaque équation du système.

3.4 Système triangulé d'équations linéaires

Considérons une équation linéaire à n variables :

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

ou plus géneralement un système de m équations linéaires à n variables.

$$\left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array}\right. \quad .$$

De la gauche vers la droite, les variables sont naturellement ordonnées : x_1 est la variable d'ordre 1 ou première variable, x_2 est la variable d'ordre 2 ou deuxième variable, ... , x_n est la variable d'ordre n ou dernière variable.

Définition 3.4.1 *(variable de tête d'une équation linéaire) La variable de tête d'une équation linéaire est la variable d'ordre le plus petit parmi celles qui ont un coefficient non nul.*

Définition 3.4.2 *(ordre d'une équation linéaire (E)) On appelle ordre de (E), noté $v(E)$, l'ordre de la variable de tête de (E).*

Exemple : Prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Soit l'équation linéaire de 4 variables u, v, w, t :

$$0u + 7v - \frac{1}{2}w + 4t = 9 \quad .$$

La variable de tête est la deuxième variable v. Ainsi, l'équation (E) est d'ordre 2 : $v(E) = 2$.

Définition 3.4.3 *Le système de m équations linéaires à n variables :*

$$\left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array}\right.$$

est dit ordonné si $v(E_1) \leq v(E_2) \leq \ldots \leq v(E_m)$ et triangulé si $v(E_1) < v(E_2) < \ldots < v(E_m)$.

Dans un système triangulé l'ordre des variables est stictement croissant. Un systéme triangulé a donc necessairement moins d'équations que de variables

Exemple : Prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, considérons le système :

$$\left[\begin{array}{lcll} 2x + y + z & = & 1 & (E_1) \\ 3y + 2z & = & 2 & (E_2) \\ -4z & = & 9 & (E_3) \end{array}\right. .$$

On a $v(E_1) < v(E_2) < v(E_3)$. Le systéme est donc triangulé.

Remarque : L'ordre d'une équation est défini si et seulemnt si elle n'est pas de la forme : $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$. On peut donc permuter les équations d'un système ne contenant pas d'équations de la forme $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ pour obtenir un système ordonné. Ce système a les mêmes solutions que le système de départ.

Exemple :

$$\left[\begin{array}{lcll} x + y + z & = & 1 & (E_1) \\ 4z & = & 2 & (E_2) \\ 7x + 5y & = & 9 & (E_3) \end{array}\right. \text{n'est pas ordonné,} \qquad \left[\begin{array}{lcll} x + y + z & = & 1 & (E_1) \\ 7x + 5y & = & 9 & (E_3) \\ 4z & = & 2 & (E_3) \end{array}\right. \text{est ordonné.}$$

On se propose maintenant de donner un algorithme que nous appelerons "algorithme de Gauss de triangulation d'un système" décidant si un systéme d'équations linéaires a des solutions et donnant dans ce cas un systéme d'équations linéaires triangulé ayant les mêmes soulutions.

Algorithme de Gauss de triangulation d'un système :

Considérons un système de m équations linéaires à n variables. Sans en changer les solutions, on peut supposer quitte à les enlever, que notre système ne contient pas d'équations triviales $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. De plus, quitte à permuter les équations, on peut supposer soit que notre système contient une équation

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$, soit que notre système est ordonné.

Etape initiale : Un systéme de $m' \leq m$ équations $E_1, E_2, \ldots, E_{m'}$ à n variables ne contenant pas d'équations triviales $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ et tels que
-soit cas 1 : le systéme contient une équation du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$.
-soit cas 2: il existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que : $v(E_1) < v(E_2) < \cdots < v(E_i) \leq v(E_{i+1}) \leq \cdots \leq v(E_{m'})$.

Passage à l'étape suivante : Si on est dans le cas 1, STOP et on y reste car le système n'a pas de solutions.! Sinon, soit x_r la variable de tête de E_i et λ le coefficient de x_r dans E_i. Notons pour $j > i$, $\lambda_{j,r}$ le coefficient de x_r dans l'équation E_j. On considére alors le systéme :

$$E' = (E_1, \ldots, E_i, E_{i+1} - \frac{\lambda_{i+1,r}}{\lambda} E_i, \ldots, E_{m'} - \frac{\lambda_{m',r}}{\lambda} E_i) \quad .$$

-Soit $j > i$. Soit $v(E_i) < v(E_j)$, alors $\lambda_{j,r} = 0$ et $E_j - \frac{\lambda_{j,r}}{\lambda} E_i = E_j$.
-Soit, $v(E_i) = v(E_j)$ et $v(E_i) < v(E_j - \frac{\lambda_{j,r}}{\lambda} E_i)$.
Ainsi pour toutes les équations :

$$E_{i+1} - \frac{\lambda_{i+1,r}}{\lambda} E_i, \ldots, E_{m'} - \frac{\lambda_{m',r}}{\lambda} E_i)$$

non du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ sont d'ordre strictement pus grand que $v(E_i)$. On supprime dans E' les équations triviales $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ s'il y en a. Puis, si le système E' ne contient aucune équation du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$, on ordonne le système en permutant les équations. On arrive ainsi à l'étape suivante.

Etape suivante : Un système de $m'' \leq m$ équations $E_1, E_2, \ldots; E_{m''}$ à n variables ne contenant pas d'équations triviales $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ et tels que
-soit cas 1 : le système contient une équation du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$.
-soit cas 2 : il existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que : $j > i$ et

$$v(E_1) < v(E_2) < \cdots < v(E_j) \leq v(E_{j+1}) \leq \cdots \leq v(E_{m''}) \quad .$$

Proposition 3.4.4 *En moins de $n-1$ étapes cet algorithme se termine sur un systéme ayant les mêmes solutions que le sytème de départ :*
-soit cas 1 : Un systéme sans solution car contenant une équation $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$
-soit cas 2 : Un systéme triangulé.

Nous montrerons dans le section suivante qu'un système triangulé a toujours des solutions.

3.5 Système triangulé d'équations linéaires

Exemple : Considérons le système suivant :

$$\left[\begin{array}{lcll} a-b & = & 0 & (E_1) \\ 2a+b-c & = & 2 & (E_2) \\ 2a+c & = & 3 & (E_3) \end{array}\right. .$$

Les variables ordonnées sont a, b, c. On a $v(E_1) = v(E_2) = v(E_3) = 1$.

Étape 2 :

$$\left[\begin{array}{lcll} a-b & = & 0 & (E_1) \\ 3b-c & = & 2 & (E_2 - 2E_1 = E_2') \\ 2b+c & = & 3 & (E_3 - 2E_1 = E_3') \end{array}\right. .$$

Ona $v(E_1) = 1 < v(E_2) = v(E_3) = 2$.

Étape 3 :

$$\left[\begin{array}{lcll} a-b & = & 0 & (E_1) \\ 3b-c & = & 2 & (E_2') \\ \frac{5}{3}c & = & \frac{5}{3} & (E_3' - \frac{2}{3}E_2')) \end{array}\right. .$$

Ona $v(E_1) < v(E_2) < v(E_3)$.

Ce systéme est donc triangulé. En anticipant sur la section suivante, en remontant les équations, on peut montrer que $(1, 1, 1)$ est la seule solution de ce systéme.

3.6 Résolution d'un système triangulé d'équations linéaires

Définition 3.6.1 *(variables libres) On appelle variables libres d'un système triangulé les variables qui ne sont pas les variables de tête d'une équation de ce systéme.*

Exemple : Prenons par exemple $K = \mathbf{Q}$ et considérons le système :

$$\left[\begin{array}{ccc} 5x + 2y + z + t & = & 0 \quad (E_1) \\ y + z - t & = & 1 \quad (E_2) \\ 4t & = & 2 \quad (E_3) \end{array}\right. .$$

Les variables sont x, y, z, t ordonnées dans cet ordre. Ce systéme est triangulé : $v(E_1) = 1$, $v(E_2) = 2$ et $v(E_3) = 4$,. La variable x est variable de tête de la première équation, y de la seconde et t de la troisième. Ainsi, le système admet z comme seule variable libre.

Nous allons maintenant montrer comment les solutions d'un systéme linéaire triangulé s'exprime à l'aide des variables libres.

La méthode est la suivante : on exprime la variable de tête de la dernière équation à l'aide des variables libres contenues dans cette équation, on remplace cette variable de tête par son expression dans les équations restantes, on obtient un systéme triangulé avec une équation de moins et il reste à itérer.

Exemple : Expliquons la métode en détail sur l'exemple précédent pour déterminer les solutions du système triangulé :

$$\left[\begin{array}{ccc} 5x + 2y + z + t & = & 0 \quad (E_1) \\ y + z - t & = & 1 \quad (E_2) \\ 4t & = & 2 \quad (E_3) \end{array}\right. .$$

Nous avons vu que z est la seule variable libre de ce système. Si $(x,y,z) \in \mathbf{Q}^3$, la dernière équation donne : $t = \frac{1}{2}$. Le triplet (x,y,z) est solution si et seulement si :

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{lcll} 5x+2y+z+t & = & 0 & (E_1) \\ y+z-t & = & 1 & (E_2) \end{array} \right. .$$

En remplaçant t par $\frac{1}{2}$ dans (E_1) et (E_2), on obtient : Le triplet (x,y,z) est solution si et seulement si :

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{lcll} 5x+2y+z & = & -\frac{1}{2} & (E_1') \\ y+z & = & \frac{3}{2} & (E_2') \end{array} \right. .$$

Le système $(E_1'), (E_2')$ est triangulé de variable libre z. La variable de tête y de (E_2') s'exprime facilement à l'aide de z : $y = \frac{3}{2} - z$. Le triplet (x,y,z) est solution si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{lcl} y & = & \frac{3}{2} - z \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{lcll} 5x+2y+z & = & -\frac{1}{2} & (E_1') \end{array} \right. .$$

En remplaçant y par $\frac{3}{2} - z$ dans (E_1'), on obtient que le triplet (x,y,z) est solution si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{lcl} y & = & \frac{3}{2} - z \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{lcll} 5x-z & = & -\frac{7}{2} & (E_1'') \end{array} \right. .$$

Le système (E_1'') est réduit à une équation, il est donc triangulé et de variable libre z. La variable de tête x de (E_1'') s'exprime facilement à l'aide de z : $x = -\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z$. On obtient ansi que le triplet (x,y,z) est solution si et seulement si :

$$x = -\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z \quad , \quad y = \frac{3}{2} - z \quad , \quad t = \frac{1}{2} \quad .$$

L'ensemble S des solutions du système est donc :

$$S = \{(-\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z, \frac{3}{2} - z, z, \frac{1}{2}) \ ; \ z \in \mathbf{Q}\} = \{(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) + z(\frac{1}{5}, -1, 1, 0) \ ; \ z \in \mathbf{Q}\} \quad .$$

En prenant $z = 0$, on obtient que $(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$ est solution du système. Ainsi, nous avons exprimé les solutions de notre système comme somme d'une solution $(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) \in S$ et des muliples de $(\frac{1}{5}, -1, 1, 0)$.

Proposition 3.6.2 *Considérons un système triangulé de m équations à n variables $x_1, \ldots, x_n$. Soit $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ les variables libres de ce système. Alors, il existe des éléments $u_{i,j} \in \mathbf{K}$, $u_i \in \mathbf{K}$ tels que l'ensemble des solutions soit l'ensemble suivant :*

$$\{(u_1, \ldots, u_n) + x_{i_1}(u_{1,1}, \ldots, u_{1,i_1-1}, 1, 0, \ldots, 0) + x_{i_2}(u_{2,1}, \ldots, u_{2,i_2-1}, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_{i_r}(u_{r,1}, \ldots, u_{r,i_r-1}, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\text{tels que } x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r} \in \mathbf{K}\}$$

Preuve : La preuve s'obtient par récurrence sur le nombre m d'équations. Pour $m = 1$, notre système est réduit á l'équation :

$$(E) \ \ a_1x_1 + + \cdots + a_nx_n = b \quad .$$

Nous supposerons pour simplifier $a_1 \neq 0$ et donc $v(E) = 1$. Ainsi, on obtient $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution de (E) si et seulement si

$$x_1 = b - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n \quad .$$

L'ensemble des solutions de E est donc :

$$S = \{(b - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}x_n, x_2, \ldots, x_n) \quad ; \quad x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{K}\} \quad ,$$

ou encore

$$S = \{(b, 0, \ldots, 0) + x_2(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0 \ldots, 0) + \cdots + x_n(-\frac{a_n}{a_1}, 0, \ldots, 0, 1) \quad ; \quad x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{K}\} \quad .$$

Cela montre la proposition pour $m = 1$. Soit $m \geq 1$, nous devons déterminer les solutions S du système :

$$E = (E_1, \ldots, E_{i_1-1}, E_{i_1+1}, \ldots, E_{i_r-1}, E_{i_r+1}, \ldots E_{m+r}) \quad .Si$$

$(\mathrm{x}_1, \ldots, x_n) \in S$, nous déduisons de E_{m+r} :

$$x_{m+r} = b_{m+r} - a_{m+r,m+r+1}x_{m+r+1} - \cdots - a_{m+r,n}x_n$$

qui exprime x_{m+r} à l'aide des variables libres $x_{m+r+1}, \ldots, x_n$. En remplaçant x_{m+r} par son expression dans les équations

$$(E_1, \ldots, E_{i_1-1}, E_{i_1+1}, \ldots, E_{i_r-1}, E_{i_r+1}, \ldots E_{m+r-1}) \quad ,$$

on obtient que $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ si et seulement si $x_{m+r} = b_{m+r} - a_{m+r,m+r+1}x_{m+r+1} - \cdots - a_{m+r,n}x_n$ et $(x_1, \ldots, x_{m+r-1}, x_{m+r+1}, \ldots x_n)$ est solution d'un systéme triangulé

$$E' = (E'_1, \ldots, E'_{i_1-1}, E'_{i_1+1}, \ldots, E'_{i_{r-1}-1}, E'_{i_{r-1}+1}, \ldots E_{m+r-1})$$

des n-1 variables $x_1, \ldots, x_{m+r-1}, x_{m+r+1}, \ldots, x_n$ et de variables libres $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$. Il reste à utiliser l'hypothèse de récurence.

3.7 Solutions d'un système d'équations linéaires

Soit $E = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$ les m équations d'un système d'équations linéaires à n variables. Pour déterminer ses solutions, on lui applique l'algorithme de Gauss de triangulation. Cet algorithme fournit un systéme E' ayant les mêmes solutions.

a) Soit E' contient une équation $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$ et E n'a donc pas de solution,

b) soit E' est triangulé.

Dans le cas b, on résoud le systéme triangulé E' comme expliqué à la section précédente en partant de la dernière équation et en "procédant par itération successive". Ses solutions s'expriment comme la somme d'une solution particulière $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et des combinaisons linéaires de r éléments $u_1, u_2, \ldots, u_r$ de $\mathbf{K}^n$.

Remarque 3.7.1 En suivant la proposition 3.6.2, nous pouvons préciser :

1) Il existe $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ tel que :

$$u_1 = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,i_1-1}, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots \ , u_r = (u_{r,1}, \ldots, u_{r,i_r-1}, 1, 0, \ldots, 0)$$

2) L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_r$ ne sont autres que les solutions du système déduit du système initial en remplaçant les second membres des équations initiales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ par 0.

3) Si les seconds membres des équations initiales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sont nuls, l'algorithme de Gauss nous fournit un système triangulé d'équations également sans second membre. La méthode de résolution du système triangulé explicitée en 3.6.2 donnera $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (0, \ldots, 0)$.

4) Inversement, si $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (0, \ldots, 0)$, c'est que les seconds membres des équations initiales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ étaient nuls.

Exemple : Travaillons avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et montrons comment déterminer les solutions du système :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 2 & (E_2) \end{array} \right. .$$

Ce systéme est ordonné. Appliquons l'algorithme de Gauss de triangulation :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 & (E_1) \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 & = & \frac{3}{2} & (E_2 - \frac{1}{2}E_1) \end{array} \right. .$$

Donc, l'algorithme de Gauss a abouti puisque ce système est triangulé. Arrangeons un peu en multipliant la deuxième équation par -2, on obtient le système triangulé (E'') ayant les mêmes solutions que E :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{rcll} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_2 + x_3 + 3x_4 & = & -3 & (E_2 - \frac{1}{2}E_1) \end{array} \right. .$$

Les variables libres sont x_3 et x_4. La dernière équation donne

$$x_2 = -3 - x_3 - 3x_4 \quad .$$

Reportons dans l'équation restante, on obtient :

$$\left[\ 2x_1 + 3(3 - x_3 - 3x_4) + x_3 + x_4 = 1 \right. \quad .$$

Soit :

$$\left[\ 2x_1 - 4x_3 - 8x_4 = 10 \right. \quad .$$

Les variables libres de ce systéme sont encore x_3 et x_4. On obtient :

$$x_1 = 2x_3 + 4x_4 + 5 \quad .$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S = \{(2x_3 + 4x_4 + 5, -3 - x_3 - 3x_4, x_3, x_4) \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(5, -3, 0, 0) + x_3(2, -1, 1, 0) + x_4(4, -3, 0, 1) \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

En guise de vérifiacation, on pourra observer que $(5, -3, 0, 0)$ est solution du système (E) et que les éléments $(2, -1, 1, 0)$ et $(4, -3, 0, 1)$ sont solutions du système dit sans second membre ou homogéne asocié à E :

$$\left[\begin{array}{ccc} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \quad (E_1) \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \quad (E_2) \end{array}\right. \quad .$$

3.8 Exercices types

Exercice 1

1) $K = \mathbf{R}$. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{ll} x + y + z = 3 & (E_1) \\ 2x - y - z = 0 & (E_2) \\ x + 3y + 2z = 6 & (E_3) \end{array}\right. \quad .$

2) Exprimer comme la somme d'un élément de $\mathbf{R}^3$ et d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}^3$ indépendants de x et y : (3x+2y+5 , x+3-7y , 2x-7y+4).

3) $K = \mathbf{R}$. Résoudre le système : $\begin{cases} x+y+z=3 & (E_1) \\ 2x-y-z=0 & (E_2) \end{cases}$. On exprimera les solutions comme somme d'une solution et des multiples d'un élément de $\mathbf{R}^3$.

4) Qu'est ce qu'on appelle dans le cours sur les systèmes linéaires les variables libres ?

Solution :

1) Commençons par trianguler le système en utilisant l'algorithme de Gauss de triangulation d'un système.

Première étape :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (E_1' = E_1) \\ -3y-3z=-6 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ 2y+z=3 & (E_3' = E_3 - E_1) \end{cases} .$$

On a avancé puisque $v(E_1) = 1 < v(E_2 - 2E_1) = v(E_3 - E_1) = 2$.

Deuxième étape :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (E_1') \\ -3y-3z=-6 & (E_2') \\ -z=-1 & (E_3' + (2/3)E_2') \end{cases} .$$

Le systéme est triangulé : $v(E_1') = 1 < v(E_2') = 2 < v(E_3' + (2/3)E_2') = 3$.

Résolvons le systéme triangulé qui a même solution que le système de départ. La dernière équation donne $z = 1$. Substituons $z = 1$ dans (E_2'), on obtient $y = 1$. Substituons $z = 1$ et $y = 1$ dans (E_1'), on obtient $x = 1$. Ainsi $(1,1,1)$ est l'unique solution de notre système. On peut le vérifier en guise de vérification des calculs ....

2) On a :

$$\begin{aligned}(3x+2y+5\,,\,x+3-7y\,,\,2x-7y+4) &= (5\,,\,3\,,\,4)+(3x\,,\,x\,,\,2x)+(2y\,,\,-7y\,,\,-7y)\\ &= (5\,,\,3\,,\,4)+x(3\,,\,1\,,\,2)+y(2\,,\,-7\,,\,-7))\ .\end{aligned}$$

3)Commençons par trianguler le système en utilisant l'algorithme de Gauss.

Première étape :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=3 & (E_1)\\ -3y-3z=-6 & (E_2-2E_1)\end{array}\right. \quad .$$

Le systéme est triangulé : $v(E_1)=1<v(E_2-2E_1)=2$.

Résolvons le systéme triangulé. La variable de tête de la première équation est x, la variable de tête de la seconde équation est y. Donc, il y a une seule variable libre : z. Un système triangulé se résoud en remontant les équations. La dernière équation donne $y=2-z$. Reportons dans la première, on obtient : $x+2-z+z=3$, soit $x=1$. Ainsi, l'ensemble S des solutions est :

$$S=\{(1,2-z,z)\ ;\ z\in\mathbf{R}\}=\{(1,2,0)+z(0,-1,1)\ ;\ z\in\mathbf{R}\}\quad .$$

On vérifie en remarquant que $(1,2,0)$ est solution de notre système et $(0,-1,1)$ est solution du système sans second membre :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ \\ 2x-y-z=0\ .\end{array}\right.$$

4) Lorsque l'on dispose d'un système triangulé d'équations linéaires. Les variables libres sont les variables qui ne sont pas variables de tête de l'une des équations du système. Les solutions d'un système triangulé d'équations linéaires s'expriment à l'aide des variables libres (cf. par exemple question précédente).

Commentaire : On attend de vous de suivre absolument une méthode précise. Sinon, il vous faudra montrer notamment que vous travaillez par équivalence. Il faut donc savoir :

Trianguler un système en suivant l'algorithme de Gauss sans oublier de préciser à chaque étape l'ordre des équations.
Dégager les variables libres d'un système triangulé.
Exprimer les solutions d'un système triangulé à l'aide des variables libres en remontant les équations.
Exprimer les solutions comme somme d'une solution particulière et de l'ensemble des combinaisons linéaires de d vecteurs fixes où d est le nombre de variable libre .

Exercice 2
On considère le système de trois équations à quatre variables :

$$(*)\quad \left\{ \begin{array}{rcll} 3x+4y+z+2t & = & 3 & (E_1) \\ 6x+8y+2z+5t & = & 7 & (E_2) \\ 9x+12y+3z+10t & = & 13 & (E_3) \end{array} \right.$$

1) Donner en suivant avec rigueur l'algorithme du cours un systéme triangulé ayant même solution.
2) Quelles sont les variables libres de ce système triangulé ?
3) Expliciter les solutions réelles de $(*)$ à l'aide des vecteurs libres.
4) Quelles sont les solutions du système sans second membre associé à $(*)$?

1) Détaillons l'algorithme de triangulation. Les trois équations de notre système $(*)$ sont d'ordre 1. Le système $(*)$ est ordonné. Passons à l'étape suivante :

$$(*)\quad \left\{ \begin{array}{rcll} 3x+4y+z+2t & = & 3 & (E'_1 = E_1) \\ t & = & 1 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ 4t & = & 4 & (E'_3 = E_3 - 3E_1) \end{array} \right.$$

Les équations sont respectivement d'ordre 1, 4 et 4. Le système $(*)$ est ordonné. Passons à l'étape suivante :

$$(*)\quad \left\{ \begin{array}{rcll} 3x+4y+z+2t & = & 3 & (E'_1) \\ t & = & 1 & (E'_2) \\ 0 & = & 0 & (E'_3 - 4E'_2) \end{array} \right.$$

Supprimons l'équation triviale $0 = 0$. Le système triangulé cherché est :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} 3x + 4y + z + 2t & = & 3 & (E_1') \\ t & = & 1 & (E_2') \end{array} \right.$$

2) Les variables de tête en sont t et x. Les variables libres sont donc y et z.
3) Pour résoudre un système triangulé, on remonte les équations. La deuxiéme équation donne $t = 1$. En substituant dans la première équation, on obtient : $3x = 1 - 4y - z$, soit :

$$x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $(*)$ est :

$$S = \{(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z, y, z, 1) \ ; \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Or, $(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z, y, z, 1) = (\frac{1}{3}, 0, 0, 1) + y(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0)$. Ainsi :

$$S = \{(\frac{1}{3}, 0, 0, 1) + y(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) \ ; \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Pour vérifier les calculs, on peut remarquer que $(\frac{1}{3}, 0, 0, 1)$ est bien une solution de $(*)$.
4) Les solutions du système sans second membre associé à $(*)$:

$$(*') \quad \left\{ \begin{array}{rcll} 3x + 4y + z + 2t & = & 0 & (E_1') \\ 6x + 8y + 2z + 5t & = & 0 & (E_2') \\ 9x + 12y + 3z + 10t & = & 0 & (E_3') \end{array} \right.$$

sont :

$$S' = \{(y(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0) + z(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) \ ; \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Pour vérifier les calculs, on peut remarquer que $(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0)$ et $(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0)$ sont bien solutions de $(*')$.

Commentaire : Sur les systèmes, il est clair que les détails de l'algorithme de triangulation n'ont pas été détaillé dans les copies. Il faut savoir ce qu'est l'ordre d'une équation, un système ordonné, un système triangulé. Il faut savoir appliquer l'algorithme de Gauss. Pour cela, revoir le cours support 2 paragraphe 4.