Approximations diophantiennes

Pierre Jammes

(version du 10 septembre 2009)

1. Fractions continues

1.1. Généralités

1.1. Étant donnée une suite (a_n), on pose

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = c_n$$

1.2. Les réduites $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ sont déterminées par les relations de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_n & = & a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n & = & a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_{-1} = 1 & p_0 = a_0 \\ q_{-1} = 0 & q_0 = 1 \end{array} \right.$$

1.3.

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \qquad p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$$

$$c_{n+1} - c_n = \tfrac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n} \qquad c_n - c_{n-2} = \tfrac{(-1)^n a_n}{q_{n-2}q_n}$$

1.4.

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0] \quad \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$$

1.2. Développement d'un irrationnel

On considère maintenant un irrationnel α et on note $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ sont développement en fraction continue simple, c'est-à-dire que $a_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout i.

1.5. Il existe une suite (α_i) à valeur dans $]0,1[$ telle que

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \alpha_n}}}} = \frac{p_n + p_{n-1}\alpha_n}{q_n + q_{n-1}\alpha_n}$$

et

$$|q_n\alpha - p_n| = \beta_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_n$$

2. Mesure

2.1. Soit Φ une fonction croissante sur $\mathbb{N}$. Si $\sum \frac{1}{\Phi(n)}$ diverge, alors l'ensemble des α tels que $a_n \leq \Phi(n)$ est négligeable. Si $\sum \frac{1}{\Phi(n)}$ converge, alors l'ensemble des α tels que $a_n \leq \Phi(n)$ est de mesure pleine.

2.2. [La65],[BDV06] Soit Ψ une fonction positive décroissante sur $\mathbb{N}$.

Si $\sum \Psi(n)$ converge, alors l'ensemble des α tels que $|q\alpha - p| < \Psi(q)$ a une infinité de solutions est négligeable.

Si $\sum \Psi(n)$ diverge, alors l'ensemble des α tels que $|q\alpha - p| < \Psi(q)$ a une infinité de solutions est de mesure pleine.

3. Exposant d'irrationalité et nombres diophantiens

3.1. Selon les auteurs, l'exposant d'irrationalité de α est défini par

$$\omega(\alpha) = \sup\left\{\nu,\ |q\alpha - p| < \frac{1}{q^\nu} \text{ a une infinité de solutions } (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

ou par $\mu(\alpha) = \omega + 1$.

3.2. Un nombre α est θ-diophantien (ou (c,θ)-diophantien) s'il existe un réel $c > 0$ tel que $|q\alpha - p| > c \cdot q^{-\theta}$ pour tout entiers p et q. Un nombre est diophantien s'il existe un θ tel qu'il soit θ-diophantien.

3.3. $\omega(\alpha) < \theta \ \Rightarrow \alpha$ est θ-diophantien $\Rightarrow\ \omega(\alpha) \leq \theta$.

3.4. [So04]

$$\omega(\alpha) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = 1 + \limsup_{n\to+\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n}.$$

4. Base d'irrationalité

4.1. [So04] La base d'irrationalité de α est définie par

$$\beta(\alpha) = \sup \left\{ \nu,\ |q\alpha - p| < \frac{1}{\nu^q} \text{ a une infinité de solutions } (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

4.2. [So04]

$$\beta(\alpha) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{q_n}.$$

4.3. Si α est diophantien, alors $\beta(\alpha) = 1$.

5. Nombres de Brjuno

5.1. La fonction de Brjuno est définie par

$$B(\alpha) = \sum_{n>0} \beta_{n-1} \ln(\alpha_n^{-1}).$$

5.2. Un nombre α satisfait la condition de Brjuno s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes qui suivent :

1. $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$;
2. $B(\alpha) < +\infty$.

5.3. La fonction de Brjuno est 1-périodique vérifie l'équation fonctionelle

$$B(\alpha) = -\ln \alpha + \alpha \cdot B(\frac{1}{\alpha})$$

pour $\alpha \in]0,1[$.

5.4. α diophantien $\Rightarrow$ α est de Brjuno $\Rightarrow$ $\beta(\alpha) = 1$.

Références

[BDV06] V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani – « Measure theoretic laws for lim sup sets », *Mem. Amer. Math. Soc.*, 179, 2006.

[La65] S. Lang – « Report on diophantine approximations », *Bull. soc. math. France*, 93, p. 177–192, 1965.

[Sc80] W. Schmidt – *Diophantine approximations*, volume 785 de *Lecture notes in mathematics*, Springer Verlag, 1980.

[So04] J. Sondow – « Irrationality measures, Irrationality bases, and a theorem of Jarnik », prépublication, 2004, math.NT/0406300.