Polynômes de Dickson

Pierre Jammes

(version du 29 avril 2013)

Remarques préliminaires

Les polynômes de Dickson sont des suites de polynômes à une indeterminée et dépendant d'un paramètre (qu'on notera respectivement X et α), qui interviennent dans des problèmes d'arithmétique (permutations sur les corps finis, algorithmes de factorisation,..). On peut les identifier formellement avec les polynômes de Tchebychev (§ 4.2), mais seulement quand α est un carré ; or, il est crucial pour certaines applications que ce ne soit pas le cas. On peut aussi les identifier aux suites de Lucas (§ 4.1) ; les considérer comme polynômes a toutefois l'avantage de faire apparaître certaines propriétés (équations fonctionnelles, dérivation) qui simplifient nombre de démonstrations.

On notera respectivement D_n et E_n les polynômes de première et deuxième espèces. Les polynômes de Dickson de deuxième espèce sont traditionnellement indexés par leur degré, mais il est commode d'introduire un *polynôme de deuxième espèce réduit* par $\overline{E}_n = E_{n-1}$, en posant $\overline{E}_0 = 0$.

1. Caractérisations

1.1. Expression des coefficients

$$\begin{aligned}
D_0(X,\alpha) &= 2, \\
D_n(X,\alpha) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(-\alpha)^k X^{n-2k} \text{ si } n>0, && (1.1)\\
E_0(X,\alpha) &= 1, \\
E_n(X,\alpha) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}(-\alpha)^k X^{n-2k} \text{ si } n>0. && (1.2)
\end{aligned}$$

1.2. Relations de récurrence

$$\begin{aligned}
D_n(X,\alpha) &= XD_{n-1}(X,\alpha) - \alpha D_{n-2}(X,\alpha), && (1.3)\\
E_n(X,\alpha) &= XE_{n-1}(X,\alpha) - \alpha E_{n-2}(X,\alpha). && (1.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} D_{n+1}(X,\alpha) \\ D_n(X,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & -\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_n(X,\alpha) \\ D_{n-1}(X,\alpha) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

$$\begin{pmatrix} E_{n+1}(X,\alpha) \\ E_n(X,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & -\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n(X,\alpha) \\ E_{n-1}(X,\alpha) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

1.3. Équations fonctionnelles

$$D_n(U+\frac{\alpha}{U},\alpha) = U^n + \left(\frac{\alpha}{U}\right)^n. \tag{1.7}$$

$$E_n(U+\frac{\alpha}{U},\alpha) = \frac{U^{n+1} - \left(\frac{\alpha}{U}\right)^{n+1}}{U - \frac{\alpha}{U}}. \tag{1.8}$$

$$\overline{E}_n(U+\frac{\alpha}{U},\alpha) = \frac{U^{n} - \left(\frac{\alpha}{U}\right)^{n}}{U - \frac{\alpha}{U}}. \tag{1.9}$$

1.4. Séries génératrices

$$\sum_{n\geq 0} D_n(X,\alpha)Z^n = \frac{2-XZ}{1-XZ-\alpha Z^2}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{n\geq 0} E_n(X,\alpha)Z^n = \frac{1}{1-XZ-\alpha Z^2}. \tag{1.11}$$

$$\sum_{n\geq 0} \overline{E}_n(X,\alpha)Z^n = \frac{Z}{1-XZ-\alpha Z^2}. \tag{1.12}$$

1.5. Équations différentielles

D_n et E_n et $\overline{E}_n$ sont respectivement solutions de

$$(x^2-4\alpha)y'' + xy' - n^2y = 0, \tag{1.13}$$

$$(x^2-4\alpha)y'' + 3xy' - n(n+2)y = 0 \tag{1.14}$$

et

$$(x^2-4\alpha)y'' + 3xy' - (n^2-1)y = 0. \tag{1.15}$$

2. Premiers termes

n	D_n	E_n
0	2	1
1	X	X
2	$X^2 - 2\alpha$	$X^2 - \alpha$
3	$X^3 - 3\alpha X$	$X^3 - 2\alpha X$
4	$X^4 - 4\alpha X^2 + 2\alpha^2$	$X^4 - 3\alpha X^2 + \alpha^2$
5	$X^5 - 5\alpha X^3 + 5\alpha^2 X$	$X^5 - 4\alpha X^3 + 3\alpha^2 X$
6	$X^6 - 6\alpha X^4 + 9\alpha^2 X^2 - 2\alpha^3$	$X^6 - 5\alpha X^4 + 6\alpha^2 X^2 - \alpha^3$
7	$X^7 - 7\alpha X^5 + 14\alpha^2 X^3 - 7\alpha^3 X$	$X^7 - 6\alpha X^5 + 10\alpha^2 X^3 - 4\alpha^3 X$

3. Propriétés

3.1. Relations mutuelles

$$\begin{cases} D_n(X,\alpha) = 2E_n(X,\alpha) - XE_{n-1}(X,\alpha). \\ (X^2-4\alpha)\overline{E}_n(X,\alpha) = 2D_{n+1}(X,\alpha) - XD_n(X,\alpha). \end{cases} \tag{3.1}$$

$$E_n(X,\alpha) - D_n(X,\alpha) = \alpha E_{n-2}(X,\alpha). \tag{3.2}$$

3.2. Relations différentielles

$$\begin{cases} D'_n(X,\alpha) = nE_{n-1}(X,\alpha) = n\overline{E}_n(X,\alpha). \\ \overline{E}'_n(X,\alpha) = \dfrac{nD_n(X,\alpha) - X\overline{E}_n(X,\alpha)}{X^2-4\alpha}. \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D_n(X,\alpha)}{\partial\alpha} = -nE_{n-2}(X,\alpha). \\ \dfrac{\partial E_n(X,\alpha)}{\partial\alpha} = -E'_{n-1}(X,\alpha). \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 E_n(X,\alpha)}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 E_{n+2}(X,\alpha)}{\partial\alpha^2} \tag{3.5}$$

3.3. Formules de duplication

$$\begin{cases} D_{2n}(X,\alpha) = D_n^2(X,\alpha) - 2\alpha^n \\ \overline{E}_{2n}(X,\alpha) = D_n(X,\alpha)\overline{E}_n(X,\alpha) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} D_{2n+1}(X,\alpha) = D_{n+1}(X,\alpha)D_n(X,\alpha) - \alpha^n X \\ \overline{E}_{2n+1}(X,\alpha) = \overline{E}_{n+1}^2(X,\alpha) - \alpha\overline{E}_n^2(X,\alpha) \end{cases} \tag{3.7}$$

3.4. Propriétés multiplicatives

$$\begin{cases} D_{mn}(X,\alpha) = D_m(D_n(X,\alpha),\alpha^n) \\ \overline{E}_{mn}(X,\alpha) = \overline{E}_m(D_n(X,\alpha),\alpha^n)\overline{E}_n(X,\alpha) \end{cases} \tag{3.8}$$

3.5. Propriétés additives

$$\begin{cases} D_{n+m}(X,\alpha) = D_n(X,\alpha)D_m(X,\alpha) - \alpha^m D_{n-m}(X,\alpha) \\ E_{n+m}(X,\alpha) = E_n(X,\alpha)E_m(X,\alpha) - \alpha E_{n-1}(X,\alpha)E_{m-1}(X,\alpha) \\ \overline{E}_{n+m}(X,\alpha) = \overline{E}_n(X,\alpha)\overline{E}_{m+1}(X,\alpha) - \alpha\overline{E}_{n-1}(X,\alpha)\overline{E}_m(X,\alpha) \end{cases} \tag{3.9}$$

3.6. Équation de Pell-Fermat

$$D_n^2(X,\alpha) - (X^2 - 4\alpha)\overline{E}_n^2(X,\alpha) = 4\alpha^n. \tag{3.10}$$

3.7. Factorisation cyclotomique

$$D_n(X,\alpha) - D_n(Y,\alpha) = \prod_{d|n} \Psi_\alpha(X,Y) \tag{3.11}$$

avec

$$\Psi_\alpha(U + \frac{\alpha}{U}, V + \frac{\alpha}{V}) = \Phi(U,V)\Phi(1, \frac{\alpha}{UV}). \tag{3.12}$$

4. Lien avec d'autres suites

4.1. Suites de Lucas

$$\begin{aligned} U_n(P,Q) &= E_{n-1}(P,Q) = \overline{E}_n(P,Q) && (4.1) \\ V_n(P,Q) &= D_n(P,Q) && (4.2) \end{aligned}$$

On a en particulier :

Nombres de Lucas :	$D_n(1,-1)$
Nombres de Fibonacci :	$\overline{E}_n(1,-1)$
Nombres de Mersenne :	$\overline{E}_n(3,2)$
Nombres de Fermat :	$D_{2^n}(3,2)$
Suites géométriques :	$D_n(2\lambda,\lambda^2) = 2\lambda^n$ et $\overline{E}_n(2\lambda,\lambda^2) = n\lambda^{n-1}$

4.2. Polynômes de Tchebychev

$$\begin{cases} D_n(2aX,a^2) & = & 2a^nT_n(X). \\ E_n(2aX,a^2) & = & a^nU_n(X). \end{cases} \tag{4.3}$$