Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham

Pierre Jammes

Résumé.— Sur toute variété compacte de dimension supérieure ou égale à 6, on prescrit le volume et le début du spectre du laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les p-formes différentielles pour $1 \leq p < \frac{n}{2}$. En particulier, on prescrit la multiplicité des premières valeurs propres.

Mots-clefs : laplacien de Hodge-de Rham, formes différentielles, multiplicité de valeurs propres.

Abstract.— On any compact manifold of dimension greater than 6, we prescribe the volume and any finite part of the spectrum of the Hodge Laplacian acting on p-form for $1 \leq p < \frac{n}{2}$. In particular, we prescribe the multiplicity of the first eigenvalues.

Keywords : Hodge Laplacian, differential forms, multiplicity of eigenvalues.

MSC2000 : 58J50

1. Introduction

On sait depuis les travaux de S. Y. Cheng [Ch76] que la multiplicité de la k-ième valeur propres du laplacien sur une surface compacte est majorée en fonction de k et de la topologie. En dimension plus grande, Y. Colin de Verdière a montré ([CdV86], [CdV87]) que toute rigidité disparaît et qu'on peut arbitrairement prescrire le début du spectre, en particulier la multiplicité des valeurs propres peut être arbitrairement grande.

Le résultat de Cheng s'étend aux opérateurs de Schrödinger sur les surfaces et la majoration de la multiplicité a été améliorée (voir [Be80], [Na88], [HHN99]), la meilleure estimation pour la multiplicité de la 2^{e} valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une surface ayant été obtenue par B. Sévennec ([Sé94], [Sé02]). Ce problème a aussi été étudié pour des opérateurs avec champ magnétique ([CdVT93], [BCC98]), pour lesquels la multiplicité peut être arbitrairement grande.

En comparaison, les connaissances sont beaucoup plus limités concernant les opérateurs agissant sur les fibrés vectoriels naturels. P. Guérini a montré dans [Gu04] qu'on peut prescrire toute partie finie du spectre du laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles, mais en imposant aux valeurs propres prescrites d'être simples. Un résultat semblable a été obtenu par M. Dahl pour l'opérateur de Dirac ([Da05]). Le seul résultat connu concernant la multiplicité des valeurs propres non nulles de ces deux opérateurs est qu'on peut construire un nombre arbitraire de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham (voir [Ja06a]).

Le but de cet article est d'étendre le théorème de Colin de Verdière aux formes différentielles en montrant que sur toute variété compacte de dimension $n \geq 6$, on peut construire des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham de multiplicité arbitrairement grande, et plus précisément que si on excepte les formes de degré $\frac{n}{2}$, on peut prescrire arbitrairement le début du spectre, avec multiplicité.

Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte orientable de dimension n, le laplacien Δ^p agissant sur l'espace $\Omega^p(M)$ des p-formes différentielles est défini par $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$ où δ désigne la codifférentielle. Nous noterons son spectre

$$0 = \lambda_{p,0}(M,g) < \lambda_{p,1}(M,g) \leq \lambda_{p,2}(M,g) \leq \dots \qquad (1.1)$$

où les valeurs propres non nulles sont répétées s'il y a multiplicité. La multiplicité de la valeur propre nulle, si elle existe, est un invariant topologique : c'est le nombre de Betti $b_p(M)$. Par théorie de Hodge, le spectre $(\lambda_{p,i}(M,g))_{i\geq 1}$ est la réunion de $(\mu_{p,i}(M,g))_i$ et $(\mu_{p-1,i}(M,g))_i$ où

$$0 < \mu_{p,1}(M,g) \leq \mu_{p,2}(M,g) \leq \dots \qquad (1.2)$$

désigne les valeurs propres du laplacien restreint à l'espace des p-formes coexactes, et on a en outre $\mu_{p,i}(M,g) = \mu_{n-p-1,i}(M,g)$ pour tout p et i si M n'a pas de bord. Le spectre complet du laplacien se déduit alors des $\mu_{p,i}(M,g)$ pour $p \leq \frac{n-1}{2}$, c'est donc à la multiplicité de ces valeurs propres qu'on va s'intéresser.

Théorème 1.3. *Soit M^n une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension $n \geq 6$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Si on se donne un réel $V > 0$, une suite $0 < a_{1,1} < a_{1,2} \leq a_{1,3} \leq \dots \leq a_{1,N}$ et des suites $0 < a_{p,1} \leq a_{p,2} \leq \dots \leq a_{p,N}$ pour $2 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$, alors il existe une métrique g sur M telle que*
- *$\mu_{p,k}(M,g) = a_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$;*
- *$\mu_{[\frac{n-1}{2}],1}(M,g) > \sup_{i,N} a_{p,i}$;*
- *$\mathrm{Vol}(M,g) = V$.*

Remarque 1.4. La condition $\mu_{[\frac{n-1}{2}],1}(M,g) > \sup_{i,N} a_{p,i}$ permet de prescrire le debut du spectre en degré $[\frac{n-1}{2}]$, les formes propres correspondantes étant exactes.

Comme dans [CdV86] et [CdV87], le principe de la démonstration consiste à faire converger le spectre de la variété vers celui d'un espace modèle (en l'occurence un domaine de la variété) qui a le spectre souhaité et de conclure grâce aux propriétés de stabilité du spectre du modèle. Pour les formes de degrés proches de $\frac{n}{2}$, la démonstration échoue en raison de l'invariance (ou la presque invariance) conforme de la norme L^2. On verra cependant que les rigidités qui apparaissent pour ces degrés faciliteront la construction des espaces modèles. Une autre difficulté apparaît pour les formes de degré 1, on ne pourra pas faire appel aux même espaces modèles que pour les autres degrés. On utilisera une construction particulière qui ne permet pas de prescrire la multiplicité de la première valeur propre et qui ne fonctionne qu'en dimension $n \geq 6$.

Le problème suivant reste donc ouvert :

Question 1.5. *La multiplicité des valeurs propres $\mu_{1,1}(M,g)$ et $\mu_{[\frac{n-1}{2}],k}(M,g)$ peut-elle être arbitrairement grande ?*

Dans [Ja06a], on montre comment construire des exemples de variétés de dimension $n \geq 4$ admettant des valeurs propres de multiplicité arbitrairement grande, y compris en degré $[\frac{n-1}{2}]$. Leur topologie est très particulière (variétés produits), mais ces exemples montrent qu'on a pas en général de borne sur la multiplicité comme en dimension 2.

En ce qui concerne $\mu_{1,1}(M,g)$, on peut aussi apporter cet élément de réponse en utilisant les même techniques que pour le théorème 1.3 :

Théorème 1.6. *Si M^n une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension $n \geq 5$, alors il existe sur M une métrique g telle que la multiplicité de $\mu_{1,1}(M,g)$ soit égale à 3.*

La méthode utilisée ne permet cependant pas de prescrire les autres valeurs propres.

Le problème le plus intéressant semble être de comprendre ce qui se passe en dimension 3. En effet, les exemples produits donné dans [Ja06a] sont de dimension au moins 4. L'énoncé de S. Y. Cheng pourrait s'étendre aux 1-formes coexactes en dimension 3 :

Question 1.7. *Sur une variété M de dimension 3, existe-t-il une borne sur la multiplicité de $\mu_{1,k}(M,g)$ dépendant uniquement de k et de la topologie de M ?*

Il faut noter que pour établir un tel résultat, on peut difficilement espérer adapter de la démonstration de Cheng dont les arguments sont spécifiques aux fonctions (domaines nodaux) et à la topologie en dimension 2.

Dans la section 2 nous montrerons, après quelques rappels techniques, qu'on peut faire tendre le spectre d'une variété compacte pour le laplacien de Hodge-de Rham vers le spectre d'un de ses domaines. La section 3 sera consacrée à la démonstration des théorèmes 1.3 et 1.6.

2. Convergence du spectre d'une variété vers celui d'un domaine

2.1. Conditions de bord et cohomologie pour une variété à bord

Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons rappeler certains aspects techniques de la théorie spectrale du laplacien de Hodge-de Rham auquels nous feront appel pour montrer qu'on peut faire tendre le spectre d'une variété compacte vers celui d'un de ses domaines (théorème 2.8).

Si U est un domaine à bord C^1 d'une variété compacte M, on note $j : \partial U \to \overline{U}$ l'injection canonique et N un champ de vecteur normal au bord. Il existe plusieurs conditions de bord admissibles pour le laplacien de Hodge-de Rham sur U (c'est-à-dire telles que le laplacien soit elliptique), les deux principales sont les conditions absolues et relatives, que nous noterons respectivement (A) et (R) et qui sont définies par

$$(A) \begin{cases} j^*(\iota_N \omega) = 0 \\ j^*(\iota_N \mathrm{d}\omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} j^*(*\omega) = 0 \\ j^*(*\mathrm{d}\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

et

$$(R) \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(\delta\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour la condition (A), $\operatorname{Ker}\Delta$ est isomorphe à la cohomologie $H^p(U)$ et pour (R), il est isomorphe à la cohomologie à support compact $H_0^p(U)$ (voir par exemple [Ta96], ch. 5). Il est immédiat que sous la condition (R) on a $j^*(\mathrm{d}\omega) = 0$. Et comme la dualité de Hodge permute ces deux conditions de bord, (A) implique que $j^*(*\delta\omega) = 0$.

Nous aurons besoin d'une autre condition de bord, définie par

$$(D) \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(*\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour la condition (D), le noyau du laplacien est trivial (voir [An89]).

Rappelons qu'en restriction aux fonctions, la condition (A) est équivalente à la condition de Neumann, et les conditions (R) et (D) à la condition de Dirichlet.

La décomposition de Hodge $L^2(\Lambda^p U) = \operatorname{Im}\mathrm{d} \oplus \operatorname{Ker}\Delta \oplus \operatorname{Im}\delta$ dépend de la condition de bord choisie. Pour une forme ω, elle s'écrit $\omega = \mathrm{d}\delta\theta + \alpha + \delta\mathrm{d}\theta$ où α et θ vérifie la condition de bord considérée, α étant dans le noyau $\operatorname{Ker}\Delta$ correspondant. Si $\omega = \mathrm{d}\varphi$, alors sa décomposition *pour la condition (A)* se réduit à $\omega = \mathrm{d}\delta\theta$ même si φ ne vérifie aucune condition de bord particulière (voir le paragraphe 2.1 de [Mc93]). En particulier, ω admet une primitive $\delta\theta$ qui est tangentielle ($j^*(\iota_N\delta\theta) = 0$) et orthogonale à toutes les formes fermées.

Nous aurons besoin de définir, outre les cohomologies $H^p(U)$ et $H_0^p(U)$ évoquées plus haut, un espace de cohomologie traduisant l'interaction entre la cohomologie de U et celle de M. Cet espace est construit comme le quotient des formes fermées de U par la restriction des formes fermées de U :

$$H^p(U/M) = \{\omega \in \Omega^p(U),\ \mathrm{d}\omega = 0\}/\{\omega_{|U},\ \omega \in \Omega^p(M) \text{ et } \mathrm{d}\omega = 0\} \qquad (2.4)$$

Comme une forme exacte de U est toujours la restriction d'une forme exacte de M, $H^p(U/M)$ est isomorphe au quotient de $H^p(U)$ par l'image de l'application naturelle $H^p(M) \to H^p(U)$ définie par restriction des formes fermées et exactes. En particulier, $H^p(U/M)$ est de dimension finie.

2.2. Caractérisation du spectre du laplacien de Hodge

Pour démontrer le théorème de convergence au paragraphe suivant, nous utiliserons une caractérisation variationnelle du spectre dont le principe est dû à J. Cheeger et J. Dodziuk :

Proposition 2.5 ([Do82], [Mc93]). *Sur une variété compacte sans bord ou avec condition de bord (A), on a*

$$\mu_{p,i} = \inf_{V_i} \sup_{\omega \in V_i \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\omega\|^2}{\|\varphi\|^2},\ \mathrm{d}\varphi = \omega \right\},$$

où V_i parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension i dans l'espace des $p+1$-formes exactes lisses.

Il faut préciser que dans le cas à bord, cette formule fournit le spectre pour la condition (A) même si on ne suppose pas que des formes ω et φ vérifient cette condition. Cela tient essentiellement au fait rappelé plus haut qu'une forme exacte admet une primitive coexacte tangente au bord.

Nous allons reformuler la proposition 2.5. Si ω est une forme exacte, alors $q(\omega) = \inf_{\mathrm{d}\varphi=\omega} \|\varphi\|^2$ est une forme quadratique, c'est la norme au carré de la primitive coexacte de ω. Son spectre est l'inverse de celui du laplacien (on peut se convaincre qu'on a aussi $q(\omega) = (\Delta^{-1}\omega, \omega)$). On retrouve la formule de la proposition 2.5 en intervertissant le rôle de la forme quadratique et de la norme de Hilbert :

Proposition 2.6. *Le spectre et les espaces propres du laplacien en restriction aux formes exactes sont ceux de la forme quadratique $Q(\omega) = \|\omega\|_{L^2}^2$ relativement à la norme $|\omega| = \inf\limits_{\mathrm{d}\varphi=\omega} \|\varphi\|_{L^2}$.*

Remarque 2.7. L'espace $\overline{L^2(\Lambda^{p+1}M) \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{d}}$ n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet pour la norme $|\cdot|$ (c'est seulement le domaine de la forme quadratique Q), mais on peut identifier son complété à $L^2(\Lambda^p M)/\overline{\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}}$, chaque forme exacte de $L^2(\Lambda^{p+1}M)$ étant identifiée à l'ensemble de ses primitives.

2.3. Convergence spectrale

Nous allons maintenant montrer comment on peut faire tendre le spectre du laplacien de Hodge-de Rham d'une variété compacte vers celui d'un domaine, généralisant ainsi au formes différentielles le théorème que Y. Colin de Verdière a montré pour les fonctions (théorème III.1 de [CdV86]). Pour appliquer ce résultat, nous aurons besoin d'une certaine uniformité de la convergence, nous reprendrons pour cela les notations de [CdV86] :

Soit E_0 et E_1 sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension N d'un espace de Hilbert, munis respectivement des formes quadratiques q_0 et q_1. Si E_0 et E_1 sont suffisamment proches, il existe une isométrie naturelle ψ entre les deux (voir la section I de [CdV86] pour les détails de la construction), on définit alors l'écart entre q_0 et q_1 par $\|q_1 \circ \psi - q_0\|$. Pour deux formes quadratiques Q_0 et Q_1 sur l'espace de Hilbert, on appelera *N-écart spectral entre Q_0 et Q_1* l'écart entre les deux formes quadratiques restreintes à la somme des espaces propres associés aux N premières valeurs propres. Si cet écart est petit, alors les N premières valeurs propres de Q_0 et leurs espaces propres sont proches de ceux de Q_1.

On veut montrer que la convergence spectrale est uniforme pour une certaine famille de spectre limite. Comme dans [CdV86] on dira donc qu'une forme quadratique vérifie l'hypothèse $(*)$ si ses valeurs propres vérifient

$$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N < \lambda_{N+1} + \eta \leq M$$

pour un entier N et des réels $\eta, M > 0$ fixés une fois pour toute.

Dans la suite du texte, sauf mention explicitement contraire, le spectre considéré sur les domaines sera toujours relatif aux conditions de bord (A).

Théorème 2.8. *Soit (M^n, g) une variété riemanienne compacte sans bord de dimension n et U un domaine de M à bord C^1. Il existe une suite de métriques (g_i) sur M conformes à g telle que*

– $\mathrm{Vol}(M, g_i) \to \mathrm{Vol}(U, g)$ *quand* $i \to \infty$;

– $\mu_{p,k}(M, g_i) \to 0$ *pour* $p \leq \frac{[n-3]}{2}$ *et* $k \leq d_p$ *quand* $i \to \infty$;

– $\mu_{p,k+d_p}(M, g_i) \to \mu_{p,k}(U, g)$ *pour* $p \leq \frac{[n-3]}{2}$ *et* $k \geq 1$ *quand* $i \to \infty$;

où d_p est la dimension de $H^p(U/M)$.

En outre, si les $\mu_{p,k}(U, g)$ vérifient l'hypothèse $(*)$ pour $1 \leq p \leq \frac{[n-3]}{2}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe i tel que le N-écart spectral entre les laplaciens sur U et M pour la métrique g_i soit inférieur à ε.

Remarque 2.9. Dans [Co04], B. Colbois avait posé la question de savoir si on peut faire tendre les valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham vers 0 en fixant le volume et la classe conforme. Pour $p \leq \frac{[n-3]}{2}$, une réponse positive a été donnée dans [Ja06b] par une constrution similaire à celle du théorème 2.8 avec $U \simeq S^p \times B^{n-p}$. Le théorème 2.8 permet une compréhension plus générale de ce phénomène, tout en simplifiant les démonstrations de [Ja06b].

On sait que l'énoncé du théorème 2.8 est faux pour $p = [\frac{n-1}{2}]$, car pour ce degré, le spectre du laplacien est uniformément minoré dans une classe conforme :

Théorème 2.10 ([Ja07]). *Soit M^n une variété compacte de dimension $n \geq 3$, Pour toute classe conforme C sur M, il existe une constante $K(C) > 0$ telle que pour toute métrique $g \in C$, on a*

$$\mu_{[\frac{n-1}{2}],1}(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \geq K.$$

On peut donc construire des contre-exemples en choisissant M et U tels que $H^{[\frac{n-1}{2}]}(M/U)$ soit non trivial, ou en utilisant un domaine dont la première valeur propre est plus petite que que $K \cdot \mathrm{Vol}(U,g)^{-\frac{2}{n}}$ (c'est possible d'après [Gu04]).

Remarque 2.11. La constante K du théorème 2.10 varie continûment pour des déformations C^0 de la métrique (voir [Ja07]). Cette propriété nous sera utile pour démontrer le théorème 1.3.

Comme dans [CdV86], on fera appel aux deux lemmes qui suivent. Les constantes N, M et η qui interviennent dans les énoncés font référence à l'hypothèse $(*)$ définie plus haut.

Lemme 2.12 ([CdV86], th. I.7). *Soit Q une forme quadratique positive sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont le domaine admet la décomposition Q-orthogonale* $\mathrm{dom}(Q) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\eta, M, N, \varepsilon) > 0$ (grande) telle que si $Q_0 = Q_{|\mathcal{H}_0}$ vérifie l'hypothèse $(*)$ et que $\forall x \in \mathcal{H}_\infty,\ Q(x) \geq C|x|^2$, alors Q et Q_0 ont un N-écart spectral inférieur à ε.*

Lemme 2.13 ([CdV86], th. I.8). *Soit $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ un espace de Hilbert muni d'une forme quadratique positive Q. On se donne en outre une suite de métriques $|\cdot|_n$ sur $\mathcal{H}$ et une suite de formes quadratiques Q_n de même domaine que Q telles que :*

- *il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall x \in \mathcal{H},\ C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x|$;*
- *pour tout $x \in \mathrm{dom}(Q)$, $Q(x) \leq Q_n(x)$;*
- *pour tout $x \in \mathrm{dom}(Q)$, $|x|_n \to |x|$ et $Q_n(x) \to Q(x)$.*

Si Q vérifie l'hypothèse $(*)$, alors à partir d'un certain rang (dépendant de η, M et N), Q et Q_n ont un N-écart spectral inférieur à ε.

Remarque 2.14. Dans le lemme 2.13, on peut affaiblir l'hypothèse $C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x|$ en $C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x| + \varepsilon_n Q(x)^{\frac{1}{2}}$ avec $\varepsilon_n \to 0$, la démonstration restant exactement la même. En particulier, il n'est pas nécessaire que l'espace de Hilbert $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ soit complet pour $|\cdot|_n$.

Remarque 2.15. Pour déduire la convergence du spectre et des espaces propres de la convergence des formes quadratiques, on doit en principe se ramener à une norme de Hilbert fixe. Ça ne sera pas nécessaire dans la suite car les étapes de la démonstration où la norme varie seront traitées à l'aide du lemme 2.13.

Démonstration du théorème 2.8 : En vertu de la proposition 2.6, il suffit de montrer la convergence des valeurs propres et des espaces propres de la forme quadratique $Q(\omega) = \|\omega\|^2$ relativement à la norme $|\omega| = \inf_{\mathrm{d}\varphi=\omega} \|\varphi\|$ pour les formes différentielles exactes de degré 1 à $[\frac{n-1}{2}]$ (les $\mu_{p,i}$ sont les valeurs propres de Q sur les formes exactes de degré $p+1$).

Comme dans [CdV86], on va passer par l'intermédiaire d'une famille de métriques singulières $(g_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définies par $g_\varepsilon = g$ sur U et $g_\varepsilon = \varepsilon^2 g$ sur $M\backslash U$. Notons que la forme quadratique Q_ε et la métrique $|\cdot|_\varepsilon$ associées à g_ε sont bien définies. Plus précisément, pour une forme exacte $\omega \in \Omega^{p+1}(M)$, on a

$$Q_\varepsilon(\omega) = \int_U |\omega|^2 \mathrm{d}v_g + \varepsilon^{n-2p-2} \int_{M\backslash U} |\omega|^2 \mathrm{d}v_g \tag{2.16}$$

et

$$|\omega|_\varepsilon^2 = \inf_{\mathrm{d}\varphi=\omega} \left(\int_U |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g + \varepsilon^{n-2p} \int_{M\backslash U} |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g \right). \tag{2.17}$$

Pour un ε fixé, on peut approcher la fonction $\chi_U + \varepsilon\chi_{M\backslash U}$ par une suite de fonctions décroissantes (f_j). La suite de métriques $f_j^2 \cdot g$ tend alors vers g_ε, et on peut vérifier que la suite de forme quadratique Q_j et la suite de métriques $|\cdot|_j$ associées à $f_j^2 g$ convergent simplement vers Q_ε et $|\cdot|_\varepsilon$ et vérifient les hypothèses du lemme 2.13. Il suffit donc de montrer la convergence spectrale pour la famille (g_ε), on pourra ensuite approcher le spectre de g_ε par celui d'une métrique lisse.

La démonstration se poursuit en deux étapes. D'abord, on décompose l'espace des $(p+1)$-formes exactes en une somme $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$ à laquelle on applique de lemme 2.12, puis on montre la convergence pour la forme quadratique Q_ε restreinte à $\mathcal{H}_0$.

On définit le sous-espace $\mathcal{H}_\infty$ de $\overline{\mathrm{Im}\,\mathrm{d}^p} \subset L^2(\Lambda^{p+1}M)$ comme l'adhérence des différentielles des formes lisses qui s'annulent sur U. Une telle forme va nécessairement vérifier la condition de bord de Dirichlet sur $M\backslash U$:

$$\mathcal{H}_\infty = \overline{\{\mathrm{d}\varphi,\ \varphi \in \Omega^p(M),\ \varphi_{|U} = 0,\ \varphi_{|M\backslash U} \text{ vérifie } (D)\}}. \tag{2.18}$$

On définit en outre $\mathcal{H}_0$ comme étant l'orthogonal de $\mathcal{H}_\infty$ dans l'espace des formes exactes pour le produit scalaire L^2 associé à g_ε. Par construction, la décomposition $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$ est Q_ε-orthogonale.

Si on note $\lambda^{(D)}$ la première valeur propre de $M\backslash U$ pour la métrique g et la condition de bord (D), on sait que pour toute forme $\omega \in \mathcal{H}_\infty$ il existe, par définition, une forme $\varphi \in \Omega^p(M)$ à support dans $M\backslash U$ telle que

$\mathrm{d}\varphi = \omega$ et $\|\omega\|^2/\|\varphi\|^2 \geq \lambda^{(D)}$ pour la métrique g. Pour la métrique g_ε, on a donc $\|\omega\|^2/\|\varphi\|^2 \geq \varepsilon^{-2}\lambda^{(D)}$, et *a fortiori* $Q_\varepsilon(\omega)/|\omega|_\varepsilon \geq \varepsilon^{-2}\lambda^{(D)}$. Si ε est suffisamment petit, on peut appliquer le lemme 2.12.

On est donc ramené à étudier la convergence spectrale de Q_ε en restriction à $\mathcal{H}_0$. Ici, la démonstration diffère sensiblement de celle donnée dans [CdV86] pour les fonctions : en effet, il s'avère qu'une forme différentielle de $\mathcal{H}_0$ n'est pas entièrement déterminée par sa restriction au domaine U. On va devoir déterminer le noyau de l'application $\Psi : \mathcal{H}_0 \to L^2(\Lambda^{p+1}U)$ définie par $\omega \mapsto \omega_{|U}$.

Soit $\omega \in \mathcal{H}_0$ telle que $\omega = 0$ sur U et $\varphi \in \Omega^p(M)$ telle que $\mathrm{d}\varphi = \omega$. Comme $\mathrm{d}\varphi_{|U} = 0$, la forme φ représente une classe de cohomologie dans $H^p(U)$. La forme φ n'est définie qu'à une forme fermée près, donc $[\varphi] \in H^p(U)$ n'est pas bien définie, mais $[\varphi] \in H^p(U/M)$ l'est. On peut donc ainsi construire une application $\operatorname{Ker}\Psi \to H^p(U/M)$ qui est bien définie.

Réciproquement, considérons un représentant φ d'une classe de $H^p(U/M)$ qu'on prolonge sur M. Dans la décomposition $\mathrm{d}\varphi = \omega_0 + \omega_\infty$ selon la somme $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$, le choix du prologement de φ n'influe que sur ω_∞, et on peut choisir ce prolongement de sorte que $\omega_\infty = 0$. En outre, deux représentants différents d'une classe de $H^p(U/M)$ diffèrent par la restriction d'une forme fermée sur M, par conséquent l'application $[\varphi] \to \mathrm{d}\varphi \in \mathcal{H}_0$ ainsi définie ne dépend pas du choix du représentant de $[\varphi]$ et définit donc une application $H^p(U/M) \to \operatorname{Ker}\Psi$ réciproque de la précédente. On en conclut que

$$\mathcal{H}_0 \simeq \overline{L^2(\Lambda^{p+1}U) \cap \operatorname{Im}\mathrm{d}^p} \oplus H^p(U/M). \tag{2.19}$$

On va achever la démonstration en appliquant le lemme 2.13 et la remarque 2.14. Il est clair que pour tout $\omega \in \mathcal{H}_0$, $Q_\varepsilon(\omega)$ tend vers $Q(\omega) = \int_U |\omega|^2 \mathrm{d}v_g$, c'est-à-dire la norme L^2 au carré de ω restreinte à U ; il reste à déterminer la limite de $|\omega|_\varepsilon$.

Pour une forme $\omega \in \mathcal{H}_0$, on pose $|\omega|^2 = \inf_{\mathrm{d}\varphi=\omega} \int_U |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g$. Ce n'est pas nécessairement la norme L^2 d'un primitive coexacte de $\omega_{|U}$, c'est-à-dire une primitive orthogonale aux formes fermées de U, car dans l'isomorphisme (2.19), ω peut avoir une composante dans $H^p(U/M)$. Mais cet infimum est réalisé dans $L^2(\Lambda^p U)$ par la projection de la restriction à U d'un primitive de ω sur l'orthogonal des restriction des formes fermées de M, $|\omega|$ définit donc bien une norme sur $\mathcal{H}_0$. En outre, la primitive φ ainsi construite est la somme d'une forme harmonique pour la condition (A) qui représente la composante selon $H^p(U/M)$ de ω, et d'une primitive coexacte tangente au bord (voir paragraphe 2.1). Elle vérifie $\int_U |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g = |\omega|^2$ et on peut la prolonger en une primitive sur M. Comme $|\omega| \leq |\omega|_\varepsilon \leq \|\varphi\|_{g_\varepsilon}$ et $\|\varphi\|_{g_\varepsilon} \to \int_U |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g$, la norme $|\cdot|_\varepsilon$ converge simplement vers $|\cdot|$.

On doit enfin contrôler $|\cdot|_\varepsilon$ en fonction de $|\cdot|$ et Q. Si on se donne $\omega \in \mathcal{H}_0$ que qu'on note φ une primitive construite comme précédemment, alors on a

$|\omega|_\varepsilon^2 \leq \|\varphi\|_\varepsilon^2 = |\omega|^2 + \varepsilon^{n-2p} \int_{M\backslash U} |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g$. Par ailleurs, on peut choisir φ telle que la norme de Sobolev $\|\varphi\|_{H^1}$ sur $M\backslash U$ pour la métrique g soit contrôlée par la norme $\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ de φ restreinte à ∂U : si on note $\bar{\varphi}$ la forme φ définie précédemment sur U et prolongée harmoniquement sur $M\backslash U$, on sait qu'on a $\|\bar{\varphi}\|_{H^1(M\backslash U)} \leq C\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}}$, la constante C étant indépendante de φ. La forme $\mathrm{d}\bar{\varphi}$ n'est pas nécessairement égale à ω car elle n'est pas forcément dans $\mathcal{H}_0$, mais sa composante $\bar{\omega}_\infty$ dans $\mathcal{H}_\infty$ vérifie $\|\bar{\omega}_\infty\|^2 \leq \|\mathrm{d}\bar{\varphi}\|^2 \leq \|\bar{\varphi}\|^2_{H^1(M\backslash U)}$, et $\bar{\omega}_\infty$ admet une primitive $\bar{\varphi}_\infty$ nulle sur U dont la norme vérifie $\|\bar{\varphi}_\infty\|^2 \leq \|\bar{\omega}_\infty\|^2/\lambda^{(D)}$. Il suffit alors de poser $\varphi = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}_\infty$. comme la norme $\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ est elle-même contrôlée par la norme H^1 de φ sur U, on a finalement

$$\int_{M\backslash U} |\varphi|^2 \mathrm{d}v_g \leq C'\|\varphi\|_{H^1(U)}, \tag{2.20}$$

où C' est une constante dépendant de g mais pas de ε.

En utilisant le fait que φ est cofermée (car orthogonale au formes exactes) et tangentielle sur U, l'inégalité elliptique associée à l'opérateur $\mathrm{d} + \delta$ (voir [Ta96], section 5.9) donne

$$\|\varphi\|_{H^1(U)} \leq C''(\|\varphi\|_{L^2(U)} + \|\mathrm{d}\varphi\|_{L^2(U)}) = C''(|\omega| + Q(\omega)^{\frac{1}{2}}), \tag{2.21}$$

En conjonction avec (2.20), on obtient une majoration de $|\omega|_\varepsilon$ qui permet d'appliquer le lemme 2.13 et la remarque 2.14. ∎

3. Prescription du spectre

Pour construire des valeurs propres multiples nous allons nous utiliser, outre théorème de convergence spectrale 2.8, une propriété de transversalité vérifée par des valeurs propres multiples sur des espaces modèles. Cette propriété remonte à Arnol'd et a été précisée par Y. Colin de Verdière dans [CdV88], nous allons en rappeler une définition :

On suppose qu'on a une famille d'opérateurs $(P_a)_{a\in B^k}$, où B^k est la boule unité de $\mathbb{R}^k$, tels que P_0 possède une valeur propre λ_0 d'espace propre E_0 et de multiplicité N. Pour les petites valeurs de a, P_a possède des valeurs propres proches de λ_0 dont la somme des espaces propres est de dimension N. Comme dans la définition de l'écart spectral, on identifie cette somme à E_0 et on note q_a la forme quadratique associée à P_a transportée sur E_0.

Définition 3.1. *On dit que λ_0 vérifie l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd si l'application $\Psi : a \mapsto q_a$ de B^k dans $\mathcal{Q}(E_0)$ est essentielle en 0, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\Phi : B^k \to \mathcal{Q}(E_0)$ vérifie $\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon$, alors il existe $a_0 \in B^k$ tel que $\Phi(a_0) = q_0$.*

Une propriété cruciale est que si Φ provient d'une famille (P'_a) d'opérateurs, alors λ_0 est valeur propre de P'_{a_0} de multiplicité N et vérifie la même propriété de transversalité : on dit que cette valeur propre multiple est stable. Comme remarqué dans [CdV88], on peut généraliser cette définition à une suite finie de valeur propre.

Pour démontrer les théorèmes 1.3 et 1.6, nous allons construire des domaines modèles dont le début du spectre vérifie la propriété de stabilité pour ensuite appliquer le théorème 2.8. Ces domaines seront des produits d'une sphère et d'une boule, ils pourront donc être plongé dans n'importe quelle variété de même dimension.

La multiplicité stable sur un produit sera obtenue grâce à la formule de Künneth : si (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont deux variétés riemanniennes compactes et $\alpha_i \in \Omega^*(M_i)$, $i = 1, 2$, alors on a, en identifiant chacune des formes α_i à son relevé sur $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$,

$$\Delta(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \Delta\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \Delta\alpha_2. \tag{3.2}$$

En particulier, Si α_i est une forme propre de valeur propre λ_i pour $i = 1, 2$, alors $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ est une forme propre de valeur propre $\lambda_1 + \lambda_2$ pour la métrique produit. Il est clair que que si α_1 et α_2 sont fermées, alors $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ aussi. On peut vérifier que pour la métrique produit, si α_1 et α_2 sont cofermées (par exemple si l'une des deux est une fonction) leur produit est aussi cofermé. En faisant le produit des formes propres cofermées d'une valeur propre de multiplicité stable par une forme propre cofermée simple, on obtient donc des formes propres cofermées pour une valeur propre de même multiplicité stable.

Nous utiliserons plusieurs fois le fait que sur une boule euclidienne de rayon ε, le noyau du laplacien pour la condition de bord (A) est trivial, sauf en degré 0 pour lequel sa dimension est 1. Toutes les autres valeurs propres tendent vers $+\infty$ quand $\varepsilon \to 0$. En particulier, sur un produit riemannien $M \times B^k(\varepsilon)$, les premières formes propres sont les relevés des premières formes propres de M.

Les trois lemmes qui suivent ont pour but de construire les domaines modèles :

Lemme 3.3. *Pour tous entiers $N \geq 1$, $n \geq 3$, toute suite finie $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g sur S^n telle que $\mu_{0,i} = a_i$ pour $i \leq N$, ces valeurs propres vérifiant l'hypothèse de stabilité, $\mu_{0,N+1} > C$ et $\mu_{p,1} > C$ pour $1 \leq p \leq [\frac{n-1}{2}]$.*

Démonstration : Le résultat sur les $\mu_{0,i}$ découle des travaux de Colin de Verdière (voir [CdV86] et [CdV87]), il suffit de montrer que la construction géométrique peut se faire avec $\mu_{p,1} > C$ pour $p \geq 1$. Le principe de la démonstration est d'appliquer le théorème 2.8 avec un domaine U dont le spectre vérifie la conclusion du lemme. Pour appliquer l'argument de stabilité, on doit pas travailler avec une seule métrique sur U mais une petite famille de métriques, un élément crucial sera alors que l'invariant conforme qui minore le spectre en degré $[\frac{n}{2}]$ varie continûment pour la topologie C^0 (voir remarque 2.11), il sera donc uniformément minoré pour cette famille de métrique.

On procède par récurrence sur la dimension. En dimension 3 et 4, on procède comme dans [CdV87] : On choisit une surface Σ dont le début du spectre (pour les fonctions) est égal à $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$ et vérifie l'hypothèse de stabilité, et on choisit comme domaine U le produit riemannien de Σ avec un petit intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ (en dimension 3) ou un petit disque de rayon ε (en dimension 4), la métrique étant prolongée de manière quelconque en dehors de U. Le théorème 2.8 et l'argument de stabilité assure l'existence d'une métrique g telle que $\mu_{0,i} = a_i$ pour $i \leq N$, et $\mu_{0,N+1} > C$, et comme son volume est arbitrairement petit, le théorème 2.10 et la remarque 2.11 assurent qu'on peut choisir g telle qu'on ait aussi $\mu_{1,1} > C$.

Si, par hypothèse de récurrence, le lemme est vrai en dimension $n-1$, on raisonne comme en dimension 3 et 4 en munissant S^{n-1} de la métrique fournie par le lemme et en utilisant le domaine $U = S^{n-1} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ plongé dans S^n. Le théorème 2.8 donne une métrique S^n qui a le spectre souhaité pour $p \leq [\frac{n-3}{2}]$ ($H^p(U/M)$ étant trivial), et le théorème 2.10 assure que $\mu_{[\frac{n-1}{2}],1} > C$. ■

Lemme 3.4. *Pour tous entiers $N \geq 1$, $p \geq 2$ et $n \geq 2p+3$, toute suite finie $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g sur la variété $M^n = S^{p+1} \times B^{p+2}$ pour $n = 2p+3$ ou $M^n = S^{n-1} \times [0,1]$ si $n > 2p+3$, telle que $\mu_{p,i} = a_i$ pour $i \leq N$, ces valeurs propres vérifiant l'hypothèse de stabilité, $\mu_{p,N+1} > C$ et $\mu_{q,1} > C$ pour $1 \leq q \leq \frac{n}{2}$, $q \neq p$, le volume* $\mathrm{Vol}(M,g)$ *étant arbitrairement petit.*

Démonstration : Remarquons d'abord qu'en prescrivant le début du spectre pour $p = 0$ dans le lemme 3.3, on a aussi prescrit les $\mu_{p,i}$ pour $p = n-1$ et $i \leq N$, par dualité de Hodge. Partant de ce constat, on va encore procéder par récurrence sur n, le degré p étant fixé.

Pour $n = 2p+3$, il suffit de considérer $M = S^{p+1} \times B^{p+2}(\varepsilon)$, la sphère S^{p+1} étant munie de la métrique fournie par le lemme 3.3 et $B^{p+2}(\varepsilon)$ étant une boule de rayon ε petit.

Pour $n > 2p+3$, la récurrence s'effectue comme dans le lemme 3.3 : on applique le théorème 2.8 au domaine M^{n-1} plongé dans S^{n-1} et on pose $M^n = S^{n-1} \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. ■

Lemme 3.5. *Pour tous entiers $N \geq 1$, $n \geq 3$, toute suite finie $a_1 < a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g sur $M = B^3 \times S^n$ telle que $\mu_{1,i}(M,g) = a_i$ pour $i \leq N$ (avec stabilité), $\mu_{1,N+1}(M,g) > C$ et $\mu_{p,1}(M,g) > C$ pour $2 \leq p \leq \frac{n}{2}$, le volume* $\mathrm{Vol}(M,g)$ *étant arbitrairement petit.*

Démonstration : On va une nouvelle fois utiliser le théorème 2.8 avec un domaine U produit d'une sphère et d'une boule, mais avec une métrique particulière sur la boule : selon [Gu04] (théorème 2.1), il existe une métrique g_B sur B^3 telle que $\mu_{1,1}(B^3, g_B) = a_1$, $\mu_{1,2}(B^3, g_B) > C$ et $\mu_{p,1}(B^3, g_B) > C$ pour $p = 0, 2$, le volume étant arbitrairement petit. En utilisant le lemme 3.3, on peut munir S^n d'un métrique telle que $\mu_{0,i}(S^n) = a_i - a_1$ pour $i \leq N-1$, $\mu_{0,N}(S^n) > C$ et $\mu_{p,1}(S^n) > C$ pour $p \geq 1$. Le produit $M = S^n \times B^3$ vérifie alors $\mu_{1,i}(M) = \mu_{0,i}(S^n) + \mu_{1,1}(B^3, g_B) = a_i$ pour $i \leq N$, $\mu_{1,N+1}(M) > C$ et $\mu_{p,1}(M) > C$ pour $2 \leq p \leq \frac{n}{2}$. ■

On est maintenant en mesure de démontrer les résultats annoncés dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1.3 : Pour chaque degré p, on se donne le domaine U_p fourni par le lemme 3.4 (ou le lemme 3.5 pour $p = 1$) dont le début du spectre en degré p est celui qu'on veut prescrire, avec $C > \sup_{p,i} a_{p,i}$. On peut noter que dans la démonstration du théorème 2.8, l'hypothèse de connexité du domaine U n'intervient pas, la conclusion reste donc vraie en remplaçant U par un nombre fini de domaine. On peut donc l'appliquer à la famille (U_p) plongée dans M (en remarquant que $H^p((\cup U_p)/M)$ est trivial pour $1 \leq p \leq \frac{n-3}{2}$), et grâce à la stabilité du spectre de ces domaines on conclut à l'existence d'une métrique g sur M telle que $\mu_{p,k}(M, g) = a_{p,k}$ pour pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$. Comme pour les lemmes précédents, le cas du degré $p = [\frac{n-1}{2}]$ est couvert par le théorème 2.10.

Pour montrer qu'on peut aussi prescrire le volume, on procède comme dans [Gu04] et [Ja06b] : on peut appliquer l'argument de stabilité au volume en le traitant comme une valeur propre simple. Il suffit donc d'ajouter à la famille U_p une boule de volume $V - \sum_p \mathrm{Vol}(U_p)$ (en ayant choisit les volumes des U_p suffisamment petits) et dont les valeurs propres pour les p-formes sont arbitrairement grandes (c'est possible selon [GP95]). Le fait que le volume de cette boule vérifie l'hypothèse de transversalité signifie simplement qu'on peut lui donner n'importe quelle valeur au voisinage de $V - \sum_p \mathrm{Vol}(U_p)$, par exemple par homothétie. ■

Démonstration du théorème 1.6 : Y. Colin de Verdière a montré que la première valeur propre de la sphère S^2 muni de sa métrique canonique est stable ([CdV88], section 2). On peut donc raisonner comme dans le lemme 3.4 : la valeur propre $\mu_{1,1}(S^2)$ est de multiplicité 3 stable et il suffit d'appliquer le théorème 2.8 au domaine $S^2 \times B^{n-2}(\varepsilon)$. ■

Références

[An89] C. Anné – « Principe de Dirichlet pour les formes différentielles », *Bull. soc. math. France*, 117 (4), p. 445–450, 1989.

[BCC98] G. Besson, B. Colbois et G. Courtois – « Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur la sphère S^2 », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1), p. 331–345, 1998.

[Be80] G. Besson – « Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes », *Ann. inst. Fourier*, 30 (1), p. 109–128, 1980.

[CdV86] Y. Colin de Verdière – « Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien », *Comment. Math. Helv.*, 61 (2), p. 254–270, 1986.

[CdV87] Y. Colin de Verdière – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 20 (4), p. 99–615, 1987.

[CdV88] Y. Colin de Verdière – « Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd », *Comment. Math. Helv.*, 63 (2), p. 184–193, 1988.

[CdVT93] Y. Colin de Verdière et N. Torki – « Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 11, p. 9–18, 1993.

[Ch76] S. Y. Cheng – « Eigenfunctions and nodal sets », *Comment. Math. Helv.*, 51 (1), p. 43–55, 1976.

[Co04] B. Colbois – « Spectre conforme et métriques extrémales », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 22, p. 93–101, 2004.

[Da05] M. Dahl – « Prescribing eigenvalues of the Dirac operator », *Manuscripta Math.*, 118 (2), p. 191–199, 2005, math.DG/0311172.

[Do82] J. Dodziuk – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85, p. 438–443, 1982.

[GP95] G. Gentile et V. Pagliara – « Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 123 (12), p. 3855–3858, 1995.

[Gu04] P. Guérini – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 37 (2), p. 270–303, 2004.

[HHN99] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof et N. Nadirashvili – « On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces », *Ann. Global Anal. Geom.*, 17 (1), p. 43–48, 1999.

[Ja06a] P. Jammes – « Construction de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham », prépublication, math.DG/0608758.

[Ja06b] P. Jammes – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », *Comment. Math. Helv.*, à paraître, math.DG/0601738.

[Ja07] P. Jammes – « Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Manuscripta Math.*, 123 (1), p. 15–23, 2007, math.DG/0604591.

[Mc93] J. McGowan – « The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.*, 297 (4), p. 725–745, 1993.

[Na88] N. Nadirashvili – « Multiple eigenvalues of the Laplace operator », *Math. USSR-Sb.*, 61 (1), p. 225–238, 1988.

[Sé94] B. Sévennec – « Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 12, p. 29–36, 1994.

[Sé02] B. Sévennec – « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.*, 324 (1), p. 195–211, 2002.

[Ta96] M. Taylor – *Partial differential equations I*, Springer, 1996.

Pierre Jammes
Université d'Avignon et des pays de Vaucluse
Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie (EA 2151)
F-84018 Avignon
Pierre.Jammes@univ-avignon.fr