VI) Pour des processus de comptage plus généraux

1) Petits calculs sur les fonctions càdlàg

Produit : Soient f et g deux fonctions à VB sur $[0,T]$ càdlàg.

Alors $\forall_{0\le} t \le T$

$$f(t)g(t) = f(0)g(0) + \int_0^t f(s)\,dg_s + \int_0^t g(s^-)\,df_s .$$

Preuve : Par Fubini,

$$\left[f(t)-f(0)\right]\left[g(t)-g(0)\right] = \int_0^t df_x \int_0^t dg_y$$
$$= \int_0^t\int_0^t df_x\,dg_y .$$

On découpe $D=[0,t]^2$ en $D_1 = \{(x,y)\in D \,/\, x \le y\}$

et $D_2 = \{(x,y)\in D \,/\, x > y\}$.

Alors

$$\int_D df_x\,dg_y = \int_{D_1} df_x\,dg_y + \int_{D_2} df_x\,dg_y$$
$$= \int_0^t \Big(\int_0^{y \leftarrow \text{inclus}} df_x \Big) dg_y + \int_0^t \Big(\int_0^{x^- \leftarrow \text{exclus}} dg_y \Big) df_x$$
$$= \int_0^t \left[f(y)-f(0)\right] dg_y + \int_0^t \big(\underbrace{g(x^-)}_{\text{limite à gauche}} - g(0)\big)\, df_x$$
$$= \int_0^t f(y)\,dg_y - f(0)\big(g(t)-g(0)\big) + \int_0^t g(x^-)\,df_x - g(0)\big(f(t)-f(0)\big)$$

Au final on a donc bien ce qui était annoncé.

Exponentielle : Soit a une fonction càd et làg (Pour simplifier nb de sauts finis)

avec $a(0)=0$. Soit $u(t)$ tq $\int_0^t |u(s)|\,da_s < \infty$.

Alors $x(t) = x(0) + \int_0^t x(s^-)\,u(s)\,da_s$

admet une unique solution localement bornée donnée par

$$x(t) = x(0) \prod_{0<s\le t} \big(1+u(s)\,\Delta a(s)\big)\, \exp\Big(\int_0^t u(s)\,da^c_s\Big)$$

où $\Delta a(s) = a(t) - a(t^-)$ et a^c est la partie continue qui reste

à $a(t) - \sum \Delta a(s)$

Preuve On admettra l'unicité ... Pour l'existence :

On pose $g(t) = x(0) \prod_{0<s\leq t} \left(1 + u(s)\Delta a(s)\right) = g(t^-) + u(t)\Delta a(t) g(t^-)$ si saut en t

(c'est constant par morceaux et continu à droite)

$f(t) = \exp\left(\int_0^t u(s)\, da_s^c\right)$ continue.

alors $x(t) = f(t)g(t)$

$$= f(0)g(0) + \int_0^t f(s)\,dg_s + \int_0^t g(s^-)\,df_s.$$

$$= x(0) + A + B$$

$$A = \int_0^t f(s)\,dg_s = \sum_{0<s\leq t} \underbrace{g(s^-)\ \overset{f(s^-)}{f(s)}}_{x(s^-)}\ u(t)\,\Delta a(t)$$

$$B = \int_0^t g(s^-)\,df_s = \int_0^t \underbrace{g(s^-)\ \overset{f(s^-)}{f(s)}}_{x(s^-)}\ u(s)\ da_s^c$$

donc comme $da = \sum_{0<s\leq t} \Delta a(s)\,\delta_s + da_s^c$.

on a bien $x(t) = x(0) + \int_0^t x(s^-)\,u(s)\,da_s$.

2) La martingale exponentielle

Thm Soit N_t un processus de comptage d'intensité $\lambda(t)$ (prévisible si asaume)

Soit (H_s) un processus prévisible tq $\int_0^t e^{H_s} \lambda(s)\,ds < \infty$ p

Alors $\mathcal{E}_t = \exp\left[\int_0^t H_s\left[dN_s - \lambda(s)ds\right] - \int_0^t \phi(H_s)\lambda(s)\,ds\right]$

est une surmartingale (ie $E(\mathcal{E}_t | \mathcal{F}_s) \leq \mathcal{E}_s$).

en particulier $E(\mathcal{E}_t) \leq \mathcal{E}_0 = 1$.

Preuve :

$$\mathcal{E}_t = \prod_{T\in N} e^{H_T}\ e^{-\int_0^t (e^{H_s}-1)\lambda(s)\,ds}$$

$$= \mathcal{E}_0 \prod_{s<t} \left(1 + (e^{H_s}-1)\,\Delta M_s\right)\ e^{\int_0^t (e^{H_s}-1)\, dM_s^c}$$

où $M_s = N_s - \int_0^s \lambda(u)\,du$ est la martingale classique

Vu le thm précédent, (27)

E_t est solution de

$$E_t = E_0 + \int_0^t E_{s-} \left(e^{H_s} - 1\right) dM_s$$

et E_{s-} est prévisible (car ~~[illegible]~~ limite à gauche).

$e^{H_s} - 1$ aussi ⇝ traçable.

⇝ donc martingale ...

Comme il faut quand m faire attention à

$$E\left(\int_0^t \left|E_{s-}\left(e^{H_s}-1\right)\right| \lambda(s)\, ds\right) < \infty.$$

Pour bien intégrer on a a que martingale locale (ie on arrête quand ça explose)

⇒ surmartingale par CVD.

Remettre ici le thm sur les Poissons et souligner l'analog avec le pb qu'on ne peut pas sortir trivialement

$e^{\int \phi(H_s)\lambda(s)\, ds}$ de l'intégrale mais que du coup on peut mettre des f aléatoires.

3) Une Bernstein pex?

Puisqu'on a droit aux H_s prévisible on a droit aux temps d'arrêt et donc on peut toujours arrêter la martingale quand pex $\int H_s^2 \lambda(s)\, ds$ est trop grand.

⇒

Soit τ le temps d'arrêt $\tau = \inf\{t \mid \int_0^t H_s^2 \lambda(s)\, ds > v\}$

$\mathcal{H}_s = \lambda H_s 1\!\!1_{s<\tau}$ prév. alors $\int_0^t H_s^2 1\!\!1_{s<\tau} \lambda(s)\, ds \le v$.

Puis ~~[illegible]~~ on regarde la (sur) martingale exponentielle associée à!

$P(E_t \geq e^x) \leq e^{-x}$

donc $P\left(\lambda \int_0^t H_s 1\!\!1_{s<\tau}(dN_s - \lambda(s)ds) - \int \phi(\lambda H_s 1\!\!1_{s<\tau})\lambda(s)\, ds \geq x\right) \leq e^{-x}$.

(*) $\|H_s\|_\infty$ borné déterministe par b. (28)

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t H_s \mathbb{1}_{s<\tau} \, dN_s - \lambda(s)ds \geq \frac{\phi(\lambda b)}{\lambda} \int_0^t H_s^2 \mathbb{1}_{s<\tau} \lambda(s)ds + \frac{x}{\lambda} \right) \leq e^{-x}.$$

majo de $\int_0^t H_s^2 \mathbb{1}_{s<\tau} \lambda(s)ds$ par v et optimisation comme avant

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t H_s \mathbb{1}_{s<\tau}(dN_s - \lambda(s)ds) \geq \sqrt{2vx} + \frac{bx}{3} \right) \leq e^{-x}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\int_0^t H_s \, dN_s - \lambda(s)ds \geq \sqrt{2vx} + \frac{bx}{3} \text{ et } \int_0^t H_s^2 \lambda(s)ds \leq v \right) \leq e^{-x}.$$

Rmq
1. On retrouve quand N PP(λ) et $H_s = f$ déterministe ce qu'on avait en Poisson.
2. Si p.s $\int_0^t H_s^2 \lambda(s)ds \leq v$ tout va bien si c'est pas vrai ... ??
3. Reestimation $v \to \int_0^t H_s^2 \lambda(s)ds \to \int_0^t H_s^2 dN_s$ (on a des pistes ...).

4) Et l'estimation adaptative ?

On ne peut pas estimer $\lambda(s)$ qui est une fonction aléatoire. Par contre il se peut que $\lambda(s)$ dépende selon les modèles d'une fonction f inconnue

ex . Durée de vie censurée $\lambda(s) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \geq t}\right) q(t)$ $f = q$
hazard rate

. Hawkes $\lambda(s) = \nu + \sum_{T<t} h(t-T)$.
$f = (\nu, h)$
(contient une f)

Cas sympathique (vrai ci-dessus)

$\lambda(s) = \Psi_f(s)$ où Ψ est une transformation linéaire (éventuellement aléa généralement) et toujours prévisible !

Si on voulait faire du seuillage pour estimer s

↪ on voudrait un estimateur sans biais de $\int \varphi_k s$

mais on n'en a pas forcément

→ Pour les données censurées $\int \frac{\varphi_k}{Y_t} dN$ a pour compensateur $\int \frac{\varphi_k}{Y_t} Y_t \, s(t) \, dt$

il faut juste faire attention à quand Y_t s'annule ...

mais pourquoi pas. Un peu dans la m idée mon article à Bernoulli (Comte Gaïffas Guilloux) + article Lucien Yannick,

→ Pas possible pour Hawkes par ex.

→ Par contre sélection de modèle possible

Contraste des moindres carrés:

$$\gamma(g) = -2 \underset{\frac{1}{T}}{?} \int_0^T \varphi_g(s) \, dN_s + \underset{\frac{1}{T}}{?} \int_0^T \varphi_g(s)^2 \, ds.$$

↪ ça a même espérance que $-2 \int_0^T \varphi_g(s) \varphi_f(s) \, ds + \int_0^T \varphi_g(s)^2 \, ds$.

$$= \|\varphi_f - \varphi_g\|^2 - \|\varphi_f^2\|$$

$$\underset{\text{par linéa}}{=} \|\varphi_{f-g}\|^2 - \|\varphi_f^2\|.$$

Q : est-ce que $\|\varphi_{f-g}\|^2 = 0 \Rightarrow f = g$? (p.s ou avec gde proba etc...)

Si la réponse est oui (~~on verra plus tard comment ça marche pour Hawkes~~).

alors on va avoir à faire à un contraste $\pm$.

Rmq l'intensité caractérise le processus donc si $E\|\varphi_{f-g}\|^2 = 0$ alors forcément $\varphi_f = \varphi_g$ p.s. et donc sauf à avoir un modèle pas identifiable, ça marche.

Si on écrit g sur la base des φ_k

$$g = \sum_{k\in m} \beta_k \varphi_k \qquad \text{et} \qquad f = \sum_{k\in m} \alpha_k \varphi_k$$

on se rend compte que

$$\gamma(g) = -2\beta^* b + \beta^* G_m \beta$$

où $$b_m = \left(\int \Psi_{\varphi_k} dN\right)_{k\in m}.$$

$$G_m = \left(\int \Psi_{\varphi_k} \Psi_{\varphi_{k'}} dt\right)_{k,k'\in m}.$$

et donc le minimum $\hat{\alpha}_m = \underset{\sim}{G_m^{-1} b_m} \to \hat{f}_m = \sum_{k\in m} \hat{\alpha}_{m,k}$

où ici tout bouge avec m

et donc on peut chercher $\hat{m}$ avec

$$\hat{m} = \operatorname{argmin}\left(\gamma(\hat{f}_m) + \mathrm{pen}\, m\right)$$

5) <u>Quelle concentration alors pour trouver la pénalité</u> ?

(On passe les calculs préliminaires)

On a toujours besoin de faire concentrer

$$\left(\sum_{k\in m} \left[\int \Psi_{\varphi_k} (dN - \lambda(x)dx)\right]^2\right)^{1/2} = \chi(m)$$

Qui n'est rien d'autre que

$$\sup_{\sum \alpha_k^2 = 1} \int \Psi_{\sum_k \alpha_k \varphi_k} (dN - \lambda(x)dx)$$

$\longrightarrow$ de manière générale on cherche donc à faire concentrer

$$\sup_{a\in \mathcal{A}} \int_0^t H_{a,s}\, dM_s = Z_t.$$

<u>Pb</u> : a priori rien dans l'infini divisibilité etc de manière générale

. Par contre on a les martingales !

$\Rightarrow$ En fait on calcule ~~son~~ Compensateur A_t (RB(SPL)) et on montre que (pex).

$$P\left(Z_t - A_t \geq \sqrt{2vu} + \frac{1}{3} bu\right) \leq \exp(-u).$$

avec $\underset{\text{déterministe}}{v} \geq \int_0^t \sup_{a \in \mathcal{A}} H_{a,s}^2 \, \lambda(s) \, ds$.

Si on le compare au thm sur les Poissons (cf p(24))

(1) non seulement A_t est moyennement calculable

(2) $v_0 = \sup_a \int \psi_a^2 \, \mu(dx)$

ie on intervertit sup et $\int$ $\Rightarrow$ c'est <u>beaucoup beaucoup</u> moins bon.

Sur le point (1) on peut quand même s'en sortir pour les χ^2.

$$\chi^2_T = \sum_{k \in m} \Big(\int_0^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prévisible}}}{h_k(t)} \, dM_t \Big)^2$$

<u>Rmq</u>: $\left(\int_0^t H_s \, dM_s \right)^2$ où H_s prévisible a pour compensateur $\int_0^t H_s^2 \, \lambda(s) \, ds$

ie $\left(\int_0^t H_s \, dM_s\right)^2 - \int_0^t H_s^2 \, \lambda(s) \, ds$ est une martingale.

En effet formule du produit :

$$\left(\int_0^t H_s \, dM_s\right)^2 = 0 + \int_0^t \int_0^s H_u \, dM_u H_s \, dM_s + \int_0^t \int_0^{s^-} H_u \, dM_u H_s \, dM_s$$

$$= \int_0^t H_s \, \mathbb{1}_{\text{sauts ens}} \, dM_s + \underbrace{2 \int_0^t \underbrace{\int_0^{s^-} H_u \, dM_u}_{\text{prév}} H_s \, dM_s}_{\text{martingale}}$$

$$= \int_0^t H_s^2 \, dN_s + \text{martingale}.$$

donc χ^2_T a pour compensateur $C_T = \sum_{k\in m} \int_0^T h_k^2(t)\, \lambda(t)\, dt$ 32
alors

$$P\left(\chi_T - \sqrt{C_T} \geq 3\sqrt{2v x} + b x \right) \leq 2e^{-x}$$

où $v = \|C_T\|_\infty$ (ie borne déter) et b déter $\geq \sqrt{\sum_{k\in m} h_k^2}$

$\Rightarrow$ une pénalité (si $\int_0^T h_k^2\, \lambda(t)\, dt \leq v_k \ldots$).

$$\text{pen } m \simeq \sum v_k^2 + \square \left(\sum v_k^2\right) x$$

avec $x =$ ~~…~~ pex L

en dépendance en la dimension du modele ($v_k^2 \leq$

$\text{pen } m \simeq D_m L_m$ avec $\sum e^{-L_m} \leq 1$

quand en Poisson $\text{pen } m \simeq$ $\sum e^{-L_m D_m} \leq 1$.

$\Rightarrow L_m$ peut pas vraiment valoir 1 ici (sauf nb fini de modèles indépendants du nb échantillon)

cf Conc en poiss $\sum v_k + Mx$

ici $\sum v_k + (\sum v_k) x$

il y a déjà de la dimension ici.

~~Donc~~ on perd $\Longrightarrow$ On ne peut pas gérer des familles de modèle aussi complexes qu'en Poisson !

<u>Amélioration</u> ? Que si plus de structure a priori !
(du genre il y a de l'indépendance qq part