VII) Les martingales ne suffisent pas toujours

0) Pourquoi ?

→ structure spatiale sans temps ! ≠ Hawkes marqué par position espace

→ même avec $\mathbb{R}$ des fois pas d'intensité condtle | ≠ ADN (ou sens de lecture et pts qui se reposent typiq.)

→ même si on a les outils, on a vu que la concentration n'est pas forcément assez forte.

→ Le pb du crochet : l'inégalité est vraie si

$$\int H_s^2 \lambda(s)\, ds \leq v \quad \text{ou sur l'evt}$$

$$\left\{\int H_s^2 \lambda(s)\, ds \leq v\right\} \longrightarrow$$ qu'il va bien falloir un jour contrôler d'une manière ou d'une autre.

1) Hawkes et pgfl.

$\lambda(s) = \nu + \sum_{T \leq t} h(t-T)$ - h à app dans $\mathbb{R}_+$

$\int H_s^2 \lambda(s)\, ds \leq v$ passe principalement par

→ borné $\lambda(s)$ et donc le nb de points dans un intervalle I.

En fait on peut voir le Hawkes (et cela m dans $\mathbb{R}^d$) comme une réunion de processus clusters

<u>Un cluster</u> :(ici) Un ancêtre en 0 et tous ses descendants jusqu'à extinction
$\mathcal{N}$

a priori la f° h de contamination peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

<u>Outil</u> pgfl ou plutôt (pour reconnaître des choses) la logLaplace fonctionnelle

(cf Daley Vere Jones). Soit f une fonction test

$$L(f) = \log E\left(\exp\left(\int f\, d\mathcal{N}\right)\right).$$

mais

$$\int f\, d\mathcal{N} = f(0) + \sum_{x \text{ enfants de } 0} \int f\, d\mathcal{N}^x$$

où $\mathcal{N}^x$ est le processus cluster où cette fois ci l'ancêtre est en x.

tous les $\mathcal{N}^x$ sont indépendants

Donc $E\left(\exp \int f\, d\mathcal{N} \,\middle|\, \text{enfants de } 0\right) = e^{f(0)} \prod_{\text{enfants de } 0} E\left(e^{\int f\, d\mathcal{N}^x} \,\middle|\, \cancel{\text{enfant de } 0}\right)$

$$= e^{f(0)} e^{\sum_{\text{enfants de } 0} L(f(x+\cdot))}$$

donc
$$L(f) = f(0) + \log E\left(\exp \int L(f(x+\cdot))\, dN^0_x\right)$$

Processus de Poisson des enfants issus de 0.

mais on sait ce qu'est la pgfl pour un PP
$$f(0) + \int \left(e^{L(f(x+\cdot))} - 1\right) h(x)\, dx.$$

Un Hawkes $N \sim H(\nu, h)$ avec $\nu(x)$ mesure pour les ancêtres (pas forcément constant.
$$\mathcal{L}(f) = \log E\left(\exp \int f\, dN\right).$$

mais N n'est rien d'autres que la réunion des clusters $\mathcal{N}^x$ où x ancêtre $\sim$ PPC

donc
$$\mathcal{L}(f) = \log E\left(\exp \sum_{x \text{ ancêtres}} \int f\, d\mathcal{N}^x\right).$$
$$= \log E\left[E\left(\exp \sum_{x \text{ ancêtres}} \int f\, d\mathcal{N}^x \,\middle|\, \text{ancêtres}\right)\right].$$
$$= \log E\left(\exp \underbrace{\sum_{x \text{ ancêtre}} L(f(x+\cdot))}_{\int L(f(x+\cdot))\, dA_x}\right).$$
$$= \int \left(e^{L(f(x+\cdot))} - 1\right) \nu(x)\, dx.$$

processus de comptage des ancêtres

Contrôle du nb de points

On applique tout d'abord la formule pour les clusters (dans $\mathbb{R}$)

à $f = z\, \mathbb{1}_{[a;+\infty)}$

donc $L(f) = \log E\left(\exp\left(z\, \mathcal{N}_{[a;\infty)}\right)\right)$ ie la Laplace du nb de pts dans $[a;+\infty)$.

$= U(a, z)$ décroit avec a

mais on sait que si $f = z\, \mathbb{1}_{(0;+\infty)}$
$$L(f) = \log E\left(\exp\left(z\, \underbrace{\mathcal{N}_{(0;+\infty)}}\right)\right) = U(+, z).$$

nb total de descendants dans un GW qui s'éteint $\rightarrow$ on connaît sa Laplace...

si h a support dans $[0,A]$.

$$U(a,z) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}\ (\text{cf } f = z\mathbb{1}_{[a;+\infty)})}{f(0)} + \int_0^\infty \left(e^{L(f(x+\cdot))} - 1\right) h(x)\,dx$$

$$= \int_0^A \left(e^{U(a-x,z)} - 1\right) h(x)\,dx .$$

si $k = \lfloor a/A \rfloor$ on veut mq $U(a,z) \le U(+,z)\,e^{-kz}$

vrai pour $0 \le a \le A$

pour $k>0$ passage de k à $k+1$

$(k+1)A \le a < (k+2)A$.

$$U(a-x,z) \le U(kA,z).$$

donc $U(a,z) = \int_0^A \left(e^{U(kA,z)} - 1\right) h(x)\,dx$

$$\le \overset{\int h\ =}{p}\ \left[\exp\left[U(+,z)\,e^{-kz}\right] - 1\right].$$

puis math.... ça marche.

<u>Passage à Hawkes</u>:

$f = z\mathbb{1}_{[0,T]}$

$$\mathcal{L}(f) = \log E\left(\exp(z N_{[0,T]})\right) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{L(f(x+\cdot))} - 1\right) \nu(x)\,dx$$

$$L(f(x+\cdot)) = L(z\mathbb{1}_{x+\cdot\in[0,T]}) = L(z\mathbb{1}_{[-x,T-x]})$$

donc si $x > T \to 0$

si $T \ge x \ge 0$ $\quad \le U(0,z)$.

si $0 > x$ $\quad \le U(-x,z)$.

donc $\mathcal{L}(f) \le \int_{-\infty}^0 \left(e^{U(-x,z)} - 1\right) d\nu + \left(\int_0^T d\nu\right)\left(e^{U(0,z)} - 1\right)$.

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \le \nu T \underbrace{\ell_0(z)} + \nu A \underbrace{\ell_1(z)}.}$$

$\nu_x = \nu$ cte

dépend de z et p...

donc ça croît linéairement en T.... En particulier

n'existe pas pour $A \ge 0$

cd° liant z et p

2) Processus Ponctuels finis (ie p.s. nb fini de points dans $\mathcal{X}$).

a) Définition / Construction probabiliste

Il suffit de se donner $\longrightarrow (p_n)_0^\infty$ $p_n \geq 0$ $\sum p_n = 1$ $\longrightarrow$ loi du nb total de pts

$\longrightarrow$ Pour tout $n \geq 1$ une loi $\Pi_n(\cdot)$ sur $\mathcal{X}$

⚠ dit comme ça on regarde la loi du n-uplet $(x_1 \dots x_n)$ et pas de l'ensemble $\{x_1 \dots x_n\}$ $\Rightarrow$ un ordre dont on ne veut généralement pas et donc on va supposer Π_n symétrique!

De plus (si Π_n a une densité)

$\Pi_n(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$ représente la probabilité sachant qu'on a n points d'avoir le $\underline{\underline{1^{er}}}$ point dans $B_{x_1}(dx_1) = B_1$ ... le $\underline{\underline{2^e}}$ ... le $\underline{\underline{n^e}}$ point dans $B_{x_n}(dx_n) = B_n$. ↑ volume dx_1

Donc

$n!\,\Pi_n(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$ ———————

——————— d'avoir 1 pt dans B_1 ... 1 pt dans ...

b) Mesure de Janossy / Densité de Janossy

ici densité n'est pas forcément $\int = 1$.

Déf La mesure de Janossy est définie par

- $J_n = p_n\, n!\, \Pi_n$
- $J_0 = p_0$

Si Abs. cont / $dx_1 \dots dx_n$ $\quad J_n \longrightarrow j_n(x_1 \dots x_n)\,dx_1 \dots dx_n$.

avec

$j_n(x_1, \dots, x_n)$ qui représente la probabilité d'avoir 1 pt dans B_1 ... 1 pt dans B_n et <u>personne ailleurs</u>.

<u>Ex</u> Processus de Poisson d'intensité $\lambda(x)$ sur $\mathcal{X}$.
(mesure moyenne $\mu = \lambda(x)\,dx$

On sait que $\quad p_n = \dfrac{\mu(\mathcal{X})^n}{n!} e^{-\mu(\mathcal{X})}$ (loi de Poisson de param $\mu(\mathcal{X})$)

et que conditionnellement à avoir n points on observe un n échantillon de loi $\dfrac{\lambda(x)\,dx}{\mu(\mathcal{X})}$ ie $\Pi_n = \dfrac{\lambda(x_1) \dots \lambda(x_n)\,dx_1 \dots d}{\mu(\mathcal{X})^n}$

Donc la densité de Janossy est

$$j_n(x_1 \dots x_n) = \cancel{n!}\, \frac{\cancel{\mu(\mathbb{X})^n}}{\cancel{n!}}\, e^{-\mu(\mathbb{X})}\, \frac{\lambda(x_1)\dots\lambda(x_n)}{\cancel{\mu(\mathbb{X})^n}}$$

$$= \lambda(x_1)\dots\lambda(x_n)\, e^{-\mu(\mathbb{X})}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\log \lambda(x_i)}\, e^{-\mu(\mathbb{X})}$$

D'où la vraisemblance $\exp\left[\int [\log \lambda(x)]\, dN - \int_{\mathbb{X}} \lambda(x)\right]$

Rmq : le calcul marche aussi avec l'intensité conditionnelle du moment qu'il n'y a pas de pb d'info extérieure aux pts de $\mathbb{X}$ dans la filtration (lemme, ancêtres...)

Prop $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(\mathbb{X}^n)}{n!} = 1.$$

$$\left(J_n(\mathbb{X}^n) = p_n\, n!\, \underbrace{\Pi_n(\mathbb{X}^n)}_{=1} = p_n\, n! \right)$$

$\Rightarrow$ On peut aussi définir un processus ponctuel fini par la donnée d'un $\longrightarrow p_0 = J_0 \geq 0$ et $p_0 \leq 1$

$\longrightarrow$ De mesures symétriques J_n sur $\mathbb{X}^n$ positives th

tq $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(\mathbb{X}^n)}{n!} = 1$.

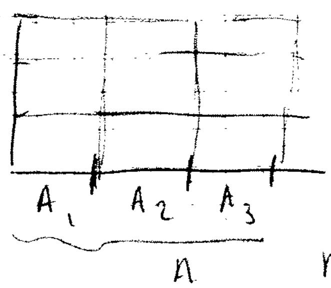
Petit lemme utile pour la suite

Soit A un ens mesu. de $\mathbb{X}$ et S une mesure symétrique sur $\mathbb{X}^n$ alors $\forall$ la partition $A_1 .. A_k$ de A on a

$$S(A^n) = \sum_{\substack{j_1, .., j_k \geq 0 \\ j_1 + .. + j_k = n}} \binom{n}{j_1 .. j_k} S(A_1^{j_1} \times \dots \times A_k^{j_k})$$

($A^n = A \times \dots \times A$ n fois).

Dreuve :



Si A partitionné par $A_1 .. A_k$ alors A^n ____ par les $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_k}$ où les $i_k = 1..$

mais $S(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n}) = S(A_1^{j_1} \times .. \times A_k^{j_k})$

où $j_1 =$ nb de fois où $i_k = 1$

nb de choix possibles $\binom{n}{j_1 \dots j_k} = \frac{n!}{j_1! \dots j_k!}$

Dans le même genre

~~Ex~~ si $A_1, \dots A_k$ est une partition de $\mathcal{X}$, $n_1 + \dots + n_k = n$

$P(n_1$ pts dans $A_1, \dots, n_k$ pts dans $A_k)$

$$= p_n \, \Pi_n (n_1 \text{ pts dans } A_1, \dots, n_k \text{ pts dans } A_k)$$

$$= p_n \binom{n}{n_1 \dots n_k} \Pi_n (A_1^{n_1} \times \dots \times A_k^{n_k})$$

$$= \frac{J_n (A_1^{n_1} \times \dots \times A_k^{n_k})}{n_1! \dots n_k!}$$

c) Mesures moments, densité produit

Pb : Souvent ce n'est pas J_n qu'on connaît ! (contrairement aux processus de comptage)

↝ le truc gênant c'est le "personne ailleurs"

On définit M_k une mesure sur $\mathcal{X}^k$ par

Mesure moment : $\forall A_1, \dots, A_r$ sont des ens disjoints

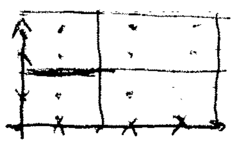
$\forall k_1, \dots, k_r$ entiers ≥ 0 tq $k_1 + \dots + k_r = k$

$$M_k (A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r}) = E(N(A_1)^{k_1} \dots N(A_r)^{k_r})$$

↝ Ça définit bien une mesure symétrique positive sur $\mathcal{X}^k$

↝ On aimerait (+L) que ça caractérise la loi comme les moments d'une loi de var. (avec cd° ..)

Ex $k=1$ $M_1(A) = M(A) = E(N(A))$. (*)



Rmq En fait $N(A_1)^{k_1} \dots N(A_r)^{k_r}$

c'est aussi $\mathcal{N}^k (A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r})$

où $\mathcal{N}^k$ = {tous les k uplets qu'on peut piocher avec remise dans N} donc M_k c'est la mesure moyenne du sens (*) de $\mathcal{N}^k$

En fait mesure moment pas terrible à cause des répétitions

on lui préfère :

Mesure moment factoriel :

Not : Si n entier ≥ 0, k. $\quad n^{[k]} = n(n-1)\dots(n-k+1)$ si $k \leq n$
$= 0$ sinon.

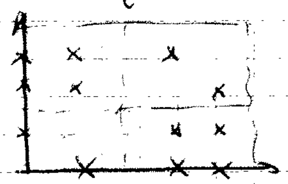
Def On définit $M_{[k]}$ sur X^k par

$\forall A_1, \dots, A_r$ des ens. mes. disj $\forall k_1 + \dots + k_r = k$

$$M_{[k]}(A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r}) = E\left(N(A_1)^{[k_1]} \dots N(A_r)^{[k_r]} \right)$$

↝ Ça définit une mesure symétrique positive sur X^k

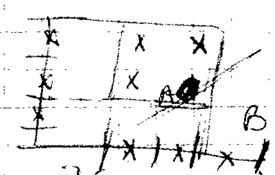
↝ Ça peut être interprété comme la mesure moyenne de $\mathcal{N}^{[k]} = \{$ tous les k uplets (pris) sans remise pris dans $N \}$.



$$\mathcal{N}^{[2]}(A_1^2) = 0$$
$$\mathcal{N}^{[2]}(A_2^2) = 2 = 2 \times 1$$
$$\mathcal{N}^{[2]}(A_1 \times A_2) = 2 = N(A_1)N(A_2)$$

Ex Soit A et B deux mesurables de X

$$M_{[2]}(A \times B) = E\left(\mathcal{N}^{[2]}(A \times B) \right)$$
$$= E\left(\mathcal{N}^2(A \times B) - N(A \cap B) \right)$$
$$= M_2(A \times B) - M(A \cap B).$$



Densité produit

Si $M_{[k]}$ est absolument continue $/ dx_1 \dots dx_k$

$M_{[k]} = m_{[k]}(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k$

$m_{[k]}$ est la densité produit

Sous réserve que 2 pts ne puissent apparaître au même endroit et que les $x_i \neq$

$m_{[k]}(x_1, \dots, x_k) =$ Probabilité d'avoir 1 pt dans B_1
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1 pt dans B_k.

On a perdu le "pas de points ailleurs" !

$m_{[k]}$ ne dépend pas de l'ens sur lequel on est

Ja sur !

Ex les processus déterminantaux

où $$M_{[k]}(x_1,\dots,x_k) = \det \begin{pmatrix} K(x_1,x_1) & & K(x_1,x_k) \\ & \ddots & \\ K(x_k,x_1) & & K(x_k,x_k) \end{pmatrix}$$

où K opérateur de type noyau ie la mat$^?$ est définie positive de vp $\in (0,1)$.

. Fermion

$$m_{[k]}(x_1 \dots x_k) = \lambda^k \det \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Boson : per mat

⚠ il y a des conditions sur λ et K pour que ça définisse bien un processus (ie les J_n ou les Π_n/p_n sont bien définies !)

d) lien densité de Janossy / densité produit

Thm : Sous hyp elles existent ttes$_\infty$ les deux, pas d'accumul.

$$(1). \quad m_{[k]}(x_1,\dots,x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{X}^n} j_{k+n}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)\, dy_1 \dots dy_n$$

$$(2). \quad j_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\mathcal{X}^n} m_{n+k}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)\, dy_1 \dots dy_k$$

Ex Poisson

Preuve

. (1) $\Rightarrow$ (2) Calcul formel ...

. Preuve de (1)

Si $A_1 \dots A_r$ partition de $\mathcal{X}$ $\quad k_1 + \dots + k_r = k$

$$M_{[k]}(A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r}) = E\left(N(A_1)^{[k_1]} \dots N(A_r)^{[k_r]}\right)$$

$$= \sum_{j_1 \geq k_1 \dots j_r \geq k_r} j_1^{[k_1]} \dots j_r^{[k_r]} P(j_1 \text{ points dans } A_1 \dots j_r \text{ points dans } A_r)$$

$$= \sum_{j_1 \geq k_1, \dots, j_r \geq k_r} j_1^{[k_1]} \dots j_r^{[k_r]} \frac{J_{j_1+\dots+j_r}(A_1^{j_1} \times \dots \times A_r^{j_r})}{j_1! \dots j_r!}$$

$= (j_1 - k_1)!$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\dots+n_r=n} \frac{1}{n_1! \dots n_r!} J_{k+n}(A_1^{k_1+n_1} \times \dots \times A_r^{k_r+n_r})$$

$n_i : j_i - k_i$

$n = n_1 + \dots + n_r$

$$J_{k+n}(A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r} \times A_1^{n_1} \times \dots \times A_r^{n_r})$$

car mesure symétrique

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n_1+\dots+n_r=n} \binom{n}{n_1 \dots n_r} J_{k+n}(A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r} \times A_1^{n_1} \times \dots \times A_r^{n_r})$$

or $J_{k+n}(A_1^{k_1} \times \dots \times A_r^{k_r} \times B)$ est une mesure symétrique où $B \in \mathcal{X}^n$ et on applique le petit lemme

Ex Poisson

Que vaut $m_{[k]}$ pour un Poisson

$$m_{[k]}(x_1 \dots x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{X}^n} \lambda(x_1) \dots \lambda(x_k)\lambda(y_1) \dots \lambda(y_n)\, e^{-\mu(X)}\, dy_1 \dots dy_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\lambda(x_1) \dots \lambda(x_k)}{\mu(X)^k}\, e^{-\mu(X)}$$

$$= \lambda(x_1) \dots \lambda(x_k) \qquad \cancel{e^{-\mu(X)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(X)^n}{n!}}$$

$$= \lambda(x_1) \dots \lambda(x_k)$$

et donc pgfl

$$\mathbb{E}\left(e^{\int f dN}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int (e^{f}-1)(x_1) \dots (e^{f}-1)(x_k)\, \lambda(x_1) \dots \lambda(x_k)\, dx_1 \dots dx_k$$

$$= \exp\left(\int (e^{f}-1)\, \lambda\, dx\right) \quad \text{OK}$$

$$M_{[k]}\left(A_1^{k_1}\times\dots\times A_r^{k_r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J_{k+n}\left(A_1^{k_1}\times\dots\times A_r^{k_r}\times \mathbb{X}^n\right)$$

et on passe à la densité.

e) lien avec les pgfl

→ lien pgfl / Janossy $\quad \zeta \geq 1$

$$G(\zeta) = E\left(\prod_i \zeta(x_i)\right) \quad \text{où } N = \{x_1 \dots x_k \dots\}$$

$$= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_{\mathbb{X}^n} \zeta(x_1)\dots\zeta(x_n)\, \Pi_n(x_1\dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{X}^n} \zeta(x_1)\dots\zeta(x_n)\; j_n(x_1,\dots,x_n)\, dx_1\dots dx_n$$

cf Vision Laplace.

$$E\left(e^{\int f\, dN}\right) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int e^{f(x_1)}\dots e^{f(x_n)}\, j_n(x_1\dots x_n)\, dx_1\dots$$

→ lien pgfl / densité produit

On écrit $\zeta = 1+\eta$ et $\eta = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ $\quad A_1 \dots A_r$ partition de $\mathbb{X}$

$$G(\zeta) = E\left(\prod_i \zeta(x_i)\right)$$

$$= E\left(\prod_i \left(1+\sum_{j=1}^{r}\alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x_i)\right)\right)$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^{r} (1+\alpha_j)^{N(A_j)}\right)$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^{r}\left(\sum_{k_j=0}^{N(A_j)} \binom{N(A_j)}{k_j} \alpha_j^{k_j}\right)\right)$$

$$= E\left(\prod_{j=1}^{r}\left(\sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{N(A_j)^{[k_j]}}{k_j!}\alpha_j^{k_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty} E\left(\prod_{j=1}^{r} \frac{N(A_j)^{[k_j]}}{k_j!}\alpha_j^{k_j}\right)$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_r=k} \left(\prod_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j^{k_j}}{k_j!}\right) M_{[k]}\left(A_1^{k_1}\times\dots\times A_r^{k_r}\right)$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{k_1+\dots+k_r=k}\binom{k}{k_1\dots k_r}\prod_{j=1}^{r}\alpha_j^{k_j}\, M_{[k]}\left(A_1^{k_1}\times\dots\times A_r^{k_r}\right)$$

Mais

$$\int_{\mathbb{X}^k} \eta(x_1) \cdots \eta(x_n)\, m_{[k]}(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{X}^k} \prod_{j=1}^{r} (\alpha_j)^{\text{nb de } x_i \text{ dans } A_j}\, m_{[k]}(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{k_1+\cdots+k_r=k} \int_{\mathbb{X}^k / \, k_j \text{ "}x_i\text{" dans } A_j} \prod_{j=1}^{r} (\alpha_j)^{k_j}\, m_{[k]}(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{k_1+\cdots+k_r=k} \left(\prod_{j=1}^{r} (\alpha_j)^{k_j}\right) \binom{k}{k_1 \ldots k_r} \times \underbrace{\int_{\mathbb{X}^k / \, x_1 \text{ dans } A_1, \ldots, x_{k_1} \ldots A_1, \ldots, A_r, A_r} m_{[k]}(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n}_{M_{[k]}(A_1^{k_1} \times \cdots \times A_r^{k_r})}$$

Donc (... passage à la limite)

$$G(Z) = G(1+\eta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{X}^k} \eta(x_1) \cdots \eta(x_n)\, m_{[k]}(x_1 \ldots x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

Vision Laplace :

$$E\left(e^{\int f dN}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{X}^k} \left(e^{f(x_1)} - 1\right) \cdots \left(e^{f(x_k)} - 1\right) m_{[k]}(x_1 \ldots x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

(cf Poisson)